

УДК 519.95

ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС. ЗАДАЧИ РЕДУКЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Ю. П. Пытьев

(кафедра математики)

Рассмотрим линейную схему измерения сигнала f :

$$\xi = Af + v, \quad \xi \in \overline{\mathcal{R}}, \quad f \in \mathcal{R}, \quad (1)$$

где ξ — результат измерения Af , v — сопутствующая погрешность (шум), A — линейный оператор, моделирующий измерительный прибор, \mathcal{R} , $\overline{\mathcal{R}}$ — евклидовы пространства. В работе [1] исследованы простейшие задачи редукции для измерительно-вычислительного комплекса «А+ЭВМ», в которых линейное преобразование (1) $R\xi = Uf + Rv$ рассматривается как выходной сигнал комплекса и интерпретируется как искаженный шумом Rv выходной сигнал заданного прибора $U = RA$. Если в (1) v — случайный вектор с нулевым средним и корреляционным оператором Σ , то речь идет о задачах редукции в рамках модели $[A, \Sigma]$ схемы измерения (1).

Однако, как отмечено в [1], такая редукция может оказаться неустойчивой, а в ряде случаев — даже невозможной. Кроме того, на практике уровень шума Rv , как правило, оказывается неприемлемо высоким, существенно искажая сигнал Uf . Ниже обсуждаются задачи редукции, свободные от перечисленных недостатков.

§ 1. Частные задачи редукции. Запишем линейное преобразование схемы (1) в следующем виде:

$$R\xi = Uf + (RA - U)f + Rv. \quad (2)$$

Если $R\xi$ рассматривать как выходной сигнал прибора U , то возникают ошибки двух типов: слагаемое Rv — шум, никак не связанный с сигналом f , и $(RA - U)f$ — искажение, зависящее от неизвестного f , т. е. ложный сигнал. В [1] используется условие $RA = U$, уничтожающее ложный сигнал при любом $f \in \mathcal{R}$. Но если при этом уровень шума Rv слишком велик, то условие точного равенства нулю ложного сигнала неразумно. В таком случае, допустив минимальный ложный сигнал, можно уменьшить шум и сбалансировать влияние обеих ошибок. Однако в случае модели $[A, \Sigma]$ априори оценить ошибку $(RA - U)f$ невозможно, поскольку сигнал f произволен, и речь может идти лишь о минимизации отличия RA от U . Поэтому задачу редукции к заданному прибору U , называемую далее частной задачей редукции, рассмотрим в следующей постановке:

$$\inf \{ \|RA - U\|_2 \mid R \in (\overline{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U}), E \|Rv\|^2 \leq \varepsilon \} = \rho_\varepsilon. \quad (3)$$

Если R_ε — решение задачи (3), то сигнал $R_\varepsilon \xi$ следует рассматривать

как искаженный шумом $R_\varepsilon v$ выходной сигнал прибора $R_\varepsilon A$, с точностью до ρ_ε совпадающего с U . Прибор $R_\varepsilon A$ — ближайший к U при заданном ограничении на уровень шума $E\|R_\varepsilon v\|^2 \leq \varepsilon$.

Теорема 1 [2]. Пусть $\hat{\Sigma}U^* \neq 0$. Тогда

$$R_\varepsilon = \begin{cases} R(\omega) = UA^*S_\omega^{-1}, \omega = \omega(\varepsilon), 0 < \varepsilon < h(U), \\ R(+0) = U(S^{-1/2}A)^{-1}S^{-1/2}, \varepsilon \geq h(U), \\ R(+\infty) = UA^*S^{-1/2}(I - (\Sigma S^{-1/2})^{-1}\Sigma S^{-1/2}), \varepsilon = 0, \end{cases}$$

где $S = AA^* + \Sigma$, $S_\omega = AA^* + \omega\Sigma$, $\omega > 0$, $h(U) = \|U\hat{\Sigma}^{1/2}\|_2^2$, и $\omega(\varepsilon)$ — корень уравнения $h_\omega(U) = \|UA^*S_\omega^{-1}\Sigma^{1/2}\|_2^2 = \varepsilon$. При этом имеет место закон сохранения $\omega dh_\omega(U)/d\omega + dg_\omega(U)/d\omega = 0$, $\omega > 0$, где $g_\omega(U) = \|R(\omega)A - U\|_2^2$. Если $\hat{\Sigma}U^* = 0$, то для $\varepsilon \geq 0$: $R_\varepsilon = UA^-(I - \Sigma^{1/2}(P\Sigma^{1/2})^{-1})$, и с вероятностью единица $R_\varepsilon \xi = UA^-Af$. При этом $\|R_\varepsilon A - U\|_2^2 = \|U(I - A^-A)\|_2^2$ и $E\|R_\varepsilon v\|^2 = 0^*$. \blacktriangle

Зависимости $h(\varepsilon, U) = E\|R_\varepsilon v\|^2$, $g(\varepsilon, U) = \|R_\varepsilon A - U\|_2^2$, $\varepsilon \geq 0$ называются оперативной характеристикой модели $[A, \Sigma]$ (или комплекса) в задаче редукции (3). Оперативная характеристика связывает уровень шума $h(\varepsilon, U)$ и «приборную невязку» $g(\varepsilon, U)$. Согласно теореме 1 шум редукции $R_\varepsilon \xi$ может быть уменьшен по сравнению с шумом редукции в [1]. Более того, поскольку при $\varepsilon \uparrow h(U)$

$$(h(\varepsilon, U) - h(U)) / (g(\varepsilon, U) - g(h(U), U)) \rightarrow -\infty,$$

то ценой минимального уклонения прибора $R_\varepsilon A$ от U достигается значительное подавление шума. Иначе говоря, допуская в редукции незначительный ложный сигнал, можно существенно снизить уровень шума.

Заметим, что для $0 < \varepsilon < h(U)$ редукция $R_\varepsilon \xi$ устойчива относительно возмущений модели $[A, \Sigma]$, а при $\varepsilon \geq h(U)$ совпадает с полученной в [1]. Вместе с тем

$$E\|R_\varepsilon \xi - Uf\|^2 = \|(R_\varepsilon A - U)f\|^2 + h(\varepsilon, U), \quad (4)$$

а это означает, что для $\varepsilon < h(U)$ ошибка редукции (4) не может быть оценена, ибо сигнал f в (4) априори произволен.

В связи со сказанным поучительно рассмотреть задачу редукции для модели с неточно заданным оператором A . Пусть A — случайный оператор, причем заданы операторы $A_0 = EA$, $J_0 = E(A - A_0)(A - A_0)^*$ и Σ . В таком случае будем говорить, что задана модель $[A_0, J_0, \Sigma]$. Для этой модели частная задача редукции выглядит следующим образом:

$$\inf \{E\|RA - U\|_2^2 \mid R \in (\bar{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U}), E\|Rv\|^2 \leq \varepsilon\} \quad (5)$$

и интерпретируется аналогично задаче (3).

Теорема 2. Пусть $B = A_0A_0^* + J_0 + \Sigma > 0$. Если $A_0\mathcal{R}(U^*) \not\subset (A_0A_0^* + J_0)\mathcal{N}(\Sigma)$, то решение задачи (5) имеет вид

$$R_\varepsilon = \begin{cases} R(\omega) = UA_0^*L_\omega, \omega = \omega(\varepsilon), 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \\ R(+0) = UA_0^*B^{-1/2}(B^{-1/2}CB^{-1/2})^{-1}B^{-1/2}, \varepsilon \geq \varepsilon_0, \\ R(+\infty) = UB^{-1/2}(I - B^{-1/2}\Sigma^{1/2}(B^{-1/2}\Sigma^{1/2})^{-1})B^{-1/2}, \varepsilon = 0, \end{cases}$$

* Обозначения совпадают с принятыми в [1].

где $\varepsilon_0 = \text{Tr } UA_0^* B^{-1/2} (B^{-1/2} C B^{-1/2})^{-1} B^{-1/2} A_0 U^*$, $L_\omega = (C + \omega \Sigma)^{-1}$, $C = A_0 A_0^* + J_0$ и $\omega(\varepsilon)$ — корень уравнения $\varepsilon = \text{Tr } UA_0^* L_\omega \Sigma L_\omega A_0 U^*$. Если $A_0 \mathcal{R}(U^*) \subset C \mathcal{N}(\Sigma)$, то $R_\varepsilon = R(+0)$, $\varepsilon \geq 0$. \blacktriangle

Заметим, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (5) устойчива относительно возмущений модели $[A_0, J_0, \Sigma]$, причем в этом случае ошибка редукции $E \|R_\varepsilon \xi - Uf\|^2$ также не может быть оценена.

Рассмотрим частную задачу редукции для модели $[A_0, J, F, \Sigma]$ [1], поставленную как задача на минимум для полной ошибки

$$E \|R_\xi - Uf\|^2 = \|(RA_0 - U)F^{1/2}\|_2^2 + \|RJ^{1/2}\|_2^2 + \|R\Sigma^{1/2}\|_2^2.$$

Но, как уже говорилось, роль ошибок $(RA - U)f$ и Rv существенно различна. Первая из них представляет собой ложный сигнал, вторая — шум. Поскольку исследователь, как правило, достаточно хорошо представляет, как может «выглядеть» шум Rv^* , то для облегчения интерпретации сигнала $R\xi$ целесообразна постановка задачи редукции, в которой минимизируется ложный сигнал при контролируемом уровне шума:

$$\inf \{E \|(RA - U)f\|^2 \mid R \in (\overline{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U}), E \|Rv\|^2 \leq \varepsilon\}.$$

Решение этой задачи можно получить из теоремы 2, если в ней произвести замены: $A_0 \rightarrow A_0 F^{1/2}$, $U \rightarrow U F^{1/2}$ и $J_0 \rightarrow J$.

В случае более полной модели $[A_0, J, f_0, F, \Sigma]$, в которой известен вектор $f_0 = Ef$, сигнал

$$R(\xi - A_0 f_0) + U f_0 = Uf + (RA_0 - U)(f - f_0) + R(A - A_0)f + Rv$$

можно рассматривать как редукцию ξ к Uf , если R — решение задачи на минимум:

$$\inf \{E \|(RA_0 - U)(f - f_0) + R(A - A_0)f\|^2 \mid R \in (\overline{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U}), E \|Rv\|^2 \leq \varepsilon\}.$$

В данном случае решение может быть получено из решения предыдущей задачи, если F заменить на F_0 , $F_0 x = Fx - f_0(x, f_0)$, $x \in \mathcal{R}$.

§ 2. Общие задачи редукции. Большой интерес представляют задачи, в которых речь идет не о конкретном приборе U , а лишь о некоторых его характеристиках. В качестве примера можно привести задачу повышения разрешения прибора A , которую можно понимать как задачу редукции к прибору с более высоким разрешением, чем у A . В этом случае прибор U не задан, а должен быть найден при решении задачи, причем на его параметры следует наложить ограничения, гарантирующие требуемое разрешение.

В ряде задач сигнал ξ требуется преобразовать к виду, какой он имел бы на выходе прибора с заданной полосой пропускания при дополнительных ограничениях на равномерность частотной и линейность фазовой характеристик. И в этом случае прибор U неизвестен, а задаются лишь ограничения на его параметры.

Рассмотрим формальную постановку задач редукции такого типа [2]. Пусть \mathbf{U} — класс линейных операторов $U \in (\overline{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U})$, $Q(\cdot)$ — функция на \mathbf{U} , принимающая значения в линейном пространстве $\overline{\mathcal{R}}$ и задающая качество на \mathbf{U} . Если $Q(U_1) < Q(U_2)$, то качество прибора $U_1 \in \mathbf{U}$ считается более высоким, чем $U_2 \in \mathbf{U}$. Общая задача редукции ставится следующим образом: для заданных $\varepsilon \in \mathcal{R}_+$ и $\delta \in \overline{\mathcal{R}}$ требуется

* Rv можно, в частности, моделировать на ЭВМ.

найти преобразование $R_{\epsilon, \delta} \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U})$ и прибор $U_{\epsilon, \delta} \in \mathbf{U}$, для которых

$$\min \{ \|RA - U\|_2 \mid R \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}), E \|Rv\|^2 \leq \epsilon, \quad (6)$$

$$U \in \mathbf{U}, Q(U) \leq \delta \} = \|R_{\epsilon, \delta}A - U_{\epsilon, \delta}\|_2 = g(\epsilon, \delta).$$

Если задача (6) разрешима, то согласно (2) сигнал $R_{\epsilon, \delta}\xi$ следует рассматривать как искаженный шумом $R_{\epsilon, \delta}v$ выходной сигнал прибора $R_{\epsilon, \delta}A$, с точностью до $g(\epsilon, \delta)$ совпадающего с $U_{\epsilon, \delta}$, причем уровень шума $R_{\epsilon, \delta}v$ и качество прибора $U_{\epsilon, \delta}$ контролируются неравенствами $E \|R_{\epsilon, \delta}v\|^2 \leq \epsilon$, $Q(U_{\epsilon, \delta}) \leq \delta$, а синтезированный прибор $R_{\epsilon, \delta}A$ — ближайший к $U_{\epsilon, \delta}$ при таких ограничениях на шум и качество.

Если $A \in \mathbf{U}$ и $Q(A) > \delta$, то $R_{\epsilon, \delta}$ задает редукцию к прибору $U_{\epsilon, \delta}$ более высокого качества, чем A , при контролируемом уровне шума $E \|R_{\epsilon, \delta}v\|^2 \leq \epsilon$. Выбирая в (6) $\epsilon < E \|v\|^2$, получаем задачу подавления шума, а если, кроме того, $Q(A) \geq \delta$, то при этом не ухудшается и качество.

Однако если для заданных ϵ и δ невязка $g(\epsilon, \delta)$ оказывается большой, то фактически синтезированный прибор $R_{\epsilon, \delta}A$ может сильно отличаться от $U_{\epsilon, \delta}$ и иметь совсем другие параметры. В таком случае ценность редукции сомнительна. Ответить на вопрос о том, как на самом деле можно выбирать ϵ и δ , в каждом конкретном случае позволяет оперативная характеристика.

Обозначим $\Lambda \subset \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}$ подмножество тех (ϵ, δ) , для которых задача (6) разрешима. Решение $R_{\epsilon, \delta}$, $U_{\epsilon, \delta}$ определяет зависимости $g(\epsilon, \delta) = \|R_{\epsilon, \delta}A - U_{\epsilon, \delta}\|_2$, $h(\epsilon, \delta) = E \|R_{\epsilon, \delta}v\|^2$, $q(\epsilon, \delta) = Q(U_{\epsilon, \delta})$, $(\epsilon, \delta) \in \Lambda$, называемые оперативной характеристикой модели $[A, \Sigma]$ в задаче редукции (6). Если прибор A предполагается использовать совместно с

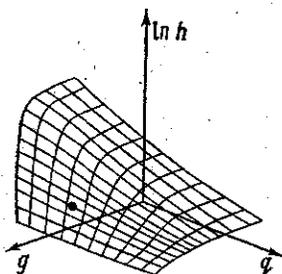


Рис. 1. Оперативная характеристика комплекса «Ядерный резонансный спектрометр + ЭВМ». Точкой выделены значения g , h и q , использованные при обработке экспериментального спектра

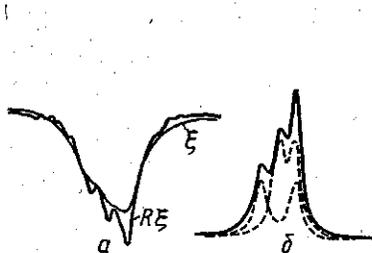


Рис. 2. Экспериментальный спектр ξ ядер ^{57}Fe в $\text{Ni}_2\text{Fe}_4\text{O}$ и результат $R\xi$ повышения разрешения в три раза (а). Результат расшифровки спектра: квадрупольные мессбауэровские дублеты ядер ^{57}Fe в А- и В-подрешетках [3]. (б)

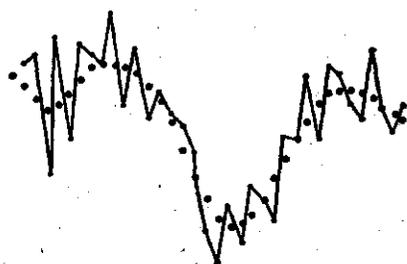


Рис. 3. Экспериментальная кривая рассеяния ξ продуктов реакции $^{27}\text{Al}(p, \alpha)^{24}\text{Mg}$ в монокристалле Al (ломаная линия). Жирные точки лежат на кривой $R\xi$, полученной в результате решения задачи редукции с подавлением шума при неизменном разрешении [4].

ЭВМ, то оперативную характеристику следует рассматривать как «паспорт» комплекса «А+ЭВМ» в задачах редукции.

Рис. 1—3 иллюстрируют решения задач редукции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1983, 24, № 4, с. 24. [2] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1983, 120, № 2, с. 240. [3] Николаев В. И. и др. ДАН СССР, 1981, 260, № 4, с. 848. [4] Бормот О. В. и др. В кн.: Тез. докл. 11 Всесоюз. совещ. по физ. взаимодействию заряж. частиц с монокристаллами. М.: Изд-во МГУ, 1981.

Поступила в редакцию
17.08.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 5

УДК 521.13

К ВОПРОСУ О ВЫБОРЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОРБИТ ДЛЯ ВНЕШНИХ СПУТНИКОВ ЮПИТЕРА

А. А. Орлов, Н. А. Соловая

(ГАИШ)

Введение. Настоящая статья посвящена приложению результатов работы [1] к определению параметров промежуточных орбит внешних спутников Юпитера.

Напомним, что в работе [1] было рассмотрено три варианта промежуточных орбит спутника планеты, движение которого подвержено сильным солнечным возмущениям. В каждом из этих вариантов учитывались наиболее существенные члены гамильтониана задачи, определяющие вековые и долгопериодические возмущения в движении спутников. Различие между вариантами состоит в порядке малости учитываемых членов гамильтониана относительно величины $m = n_2/n_1$, где n_1 — среднее движение спутника, n_2 — среднее движение Солнца вокруг планеты. В первом варианте были учтены члены второго порядка относительно m , во втором варианте — члены второго и третьего порядков и, наконец, в третьем варианте — члены второго, третьего и четвертого порядков.

Таким образом, следует ожидать, что при переходе от первого варианта промежуточной орбиты ко второму и от второго к третьему точность представления движения спутника будет возрастать. С другой стороны, при таких переходах будет все более и более увеличиваться сложность формул, представляющих промежуточное движение. В связи с этим возникает вопрос о выборе оптимального варианта промежуточной орбиты, при котором достигалась бы достаточная точность и наибольшая простота аналитической структуры формул.

Целью настоящей работы является выяснение вопроса о том, насколько велико различие однотипных параметров различных вариантов промежуточных орбит, построенных для какого-либо конкретного спутника, и как изменяются эти различия при переходе от спутников, более близких к планете, к спутникам более далеким. Такое исследование может оказать помощь в выборе оптимального варианта промежуточной орбиты при построении теории движения спутников.

Вычисления, приведенные в настоящей работе, относятся к спутникам Юпитера, имеющим номера с VI по XII. Исходными данными для вычислений послужили элементы орбит этих спутников, приведенные в табл. 1 работы [2]. Для каждого из указанных спутников были вычислены в трех вариантах и сопоставлены друг с другом наибольшие и наименьшие значения эксцентриситетов их оскулирующих орбит в промежуточном движении.