СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Королев Ф. А., Клементьева А. Ю., Тихонравов А. В. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1977, 18, № 3, с. 15. [2] Бернинг П. Х. В кн.: Физика тонких пленок. Т. 1. М.: Мир, 1967, с. 91. [3] Фурман Ш. А. Опт. и спектр., 1974, 36, с. 421. [4] Zafirova B. S., Peeva R. A., Zartov G. D. Comp. Rendus de l'Acad. Bulgar Sci., 1978, 31, N 10, p. 1373.

Поступила в редакцию
28.10.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 5

УДК 519:242

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА ВРЕМЕНИ ИЗМЕРЕНИЙ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Ю. П. Пытьев, П. В. Голубцов

(кафедра математики)

§ 1. **Введение.** В современных экспериментальных исследованиях прецизионные измерения связаны с большими затратами времени. Однако известно, что невозможно достигнуть любой наперед заданной точности путем неопределенно долгого проведения измерений, поскольку в конечном счете начинают играть роль нестабильности, связанные с медленным дрейфом параметров оборудования, с разрушением объекта измерения и т. п. В связи с этим возникает задача оптимального планирования цикла измерений при условии, что общее время измерений ограничено заданной величиной.

В работе развиты методы оптимального планирования цикла измерений, обобщающие результаты [1] и позволяющие в ряде случаев значительно повысить точность измерений.

Рассмотрим схему измерения вектора $f\in\mathcal{R}$, содержащую серии

$$\xi_j=A_jf+\nu_j,\ j=0,\dots,m, \tag{1}$$

где ξ_j — результат измерения вектора A_jf, $A_j\in(\mathcal{R}\to\overline{\mathcal{R}}_j)$ — линейный оператор, ν_j — случайный вектор, определяющий погрешность j-го измерения, $E\nu_j=0$; ξ_j, A_jf, $\nu_j\in\overline{\mathcal{R}}_j$. Будем считать, что j-е измерение проводится в течение времени τ_j независимо от остальных измерений, и погрешность характеризуется корреляционным оператором Σ_j/τ_j,

$$\frac{1}{\tau_j}\Sigma_jx=E\nu_j(x,\nu_j),\ x\in\overline{\mathcal{R}}_j,\ j=0,\dots,m.$$

Задача планирования измерений (1) состоит в определении такой стратегии измерений $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_m)$, чтобы оптимальная оценка вектора f, найденная на основе (1), обладала максимальной точностью при условии $\tau_1+\dots+\tau_m=1$, $\tau_1\geqslant0,\dots,\tau_m\geqslant0$. В данном случае, в отличие от работы [1], считается, что время τ_0 измерения ξ_0 фиксировано: $\tau_0=1$.

Перепишем (1) в виде

$$\xi=Af+\nu,\ \xi\in\bigoplus_{j=0}^{m}\overline{\mathcal{R}}_j\equiv\overline{\mathcal{R}},\ f\in\mathcal{R}, \tag{2}$$

где $\xi=\begin{pmatrix}\xi_0\\ \vdots\\ \xi_m\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}A_0\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}$, $\nu=\begin{pmatrix}\nu_0\\ \vdots\\ \nu_m\end{pmatrix}$ и $E\nu=0$, $E\nu(x,\nu)=\Sigma x$, $x\in\overline{\mathcal{R}}$, т. е. $\Sigma=\operatorname{diag}(\Sigma_0,\tau_1^{-1}\Sigma_1,\dots,\tau_m^{-1}\Sigma_m)$ — корреляционный оператор ν, $\Sigma\in(\overline{\mathcal{R}}\to\overline{\mathcal{R}})$.

§ 2. **Задачи линейного оценивания** [2]. Пусть требуется оценить вектор Uf на основании схемы (2); $U\in(\mathcal{R}\to\mathcal{U})$ — заданный линейный оператор.

Теорема 1 [2]. Условие $U\in\mathcal{D}_A=\{U\in(\mathcal{R}\to\mathcal{U}),\ U(I-A^-A)=0\}$ необходимо и достаточно для существования оценки $R\xi$ вектора Uf, такой, что для любого $f\in\mathcal{R}$

$$E\|R\xi-Uf\|^2=\inf\{E\|R'\xi-Uf\|^2\,|\,R'\in(\bar{\mathcal{R}}\to\mathcal{U}),\ E(R'\xi-Uf)=0\}. \quad (3)$$

Если корреляционный оператор Σ невырожден, то

$$R=U(A^*\Sigma^{-1}A)^-A^*\Sigma^{-1},$$

$$E\|R\xi-Uf\|^2=\operatorname{Tr}U(A^*\Sigma^{-1}A)^-U^*, \quad (4)$$

причем R — единственное решение задачи (3). ▲

Величину $E\|R\xi-Uf\|^2$ назовем шумом оценки $R\xi\equiv\widehat{Uf}$ вектора Uf, $f=(A^*\Sigma^{-1}A)^-A^*\Sigma^{-1}Af+(A^*\Sigma^{-1}A)^-A^*\Sigma^{-1}\nu$.

Если $f\in\mathcal{R}$ — случайный вектор с заданным корреляционным оператором $F\in(\mathcal{R}\to\mathcal{R})$, $Fx=Ef(x,f)$, $x\in\mathcal{R}$, то справедлива

Теорема 2 [2]. Пусть операторы Σ и F невырождены. Тогда для всякого $U\in(\mathcal{R}\to\mathcal{U})$ существует оценка $R\xi$ вектора Uf, удовлетворяющая условию

$$\inf\{E\|R'\xi-Uf\|^2\,|\,R'\in(\mathcal{R}\to\mathcal{U})\}=E\|R\xi-Uf\|^2,$$

причем

$$R=U(A^*\Sigma^{-1}A+F^{-1})A^*\Sigma^{-1},$$

$$E\|R\xi-Uf\|^2=\operatorname{Tr}U(A^*\Sigma^{-1}A+F^{-1})^{-1}U^*. \ ▲ \quad (5)$$

§ 3. **Постановка задачи планирования измерений.** Согласно (4) выражение для шума в задаче (2) имеет вид

$$E\|R\xi-Uf\|^2=\operatorname{Tr}UV^{-1}(\tau)U^*=U(\tau),\ \tau=(\tau_1,\ldots,\tau_m), \quad (6)$$

где

$$V(\tau)=A^*\Sigma^{-1}(\tau)A=\sum_{j=1}^{m}\tau_jV_j+V_0,\ V_j=A_j^*\Sigma_j^{-1}A_j\in(\mathcal{R}\to\mathcal{R}).$$

Сформулируем задачу оптимизации измерения в следующей постановке: требуется определить стратегию измерения $\tau^0=(\tau_1^0,\ldots,\tau_m^0)$, для которой

$$\inf\{u(\tau)\,|\,\tau\in\mathcal{T}\}=u(\tau^0),\ \mathcal{T}=\left\{\tau,\ \tau_j\geqslant0,\ j=1,\ldots,m,\ \sum_{j=1}^{m}\tau_j=1\right\}. \quad (7)$$

Пусть $(\mathcal{T})=\left\{\tau,\ \tau_j>0,\ j=1,\ldots,m,\ \sum_{j=1}^{m}\tau_j=1\right\}$. Если оператор $V(\tau)$ в (6) невырожден при некотором $\tau=\bar{\tau}\in(\mathcal{T})$, то он невырожден и при любом $\tau\in(\mathcal{T})$. Кроме того, $u(\tau)$ — выпуклая и, следовательно, непрерывная функция на $(\mathcal{T})$.

Будем считать $u(\tau)$ доопределенной на границе $(\mathcal{T})$ предельными значениями, возможно, равными $+\infty$. Тогда задача (7) будет выпуклой и разрешимой [3].

Обозначим $\mathcal{T}(\mathcal{N}')$ — подмножество элементов $\tau\in\mathcal{T}$, у которых $\tau_j>0$ для $j\in\mathcal{N}'\subset\mathcal{N}=\{1,\ldots,m\}$ и $\tau_j=0$ для $j=\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}'$, и $u_j(\tau)=$

$=\operatorname{Tr} UV^{-1}(\tau)V_jV^{-1}(\tau)U^*$, $j=0,\ldots,m$. Согласно (6)

$$u(\tau)=u'(\tau)+u_0(\tau), \tag{8}$$

где $u'(\tau)=\sum_{j=1}^{m}\tau_j u_j(\tau)$.

Лемма 1.

1. Функции $u'(\tau)$, $u(\tau)$ и $\gamma(\tau)=\max\{u_j(\tau)\mid j\in N\}$ достигают минимума на одном и том же подмножестве $\mathcal{T}_*\subset\mathcal{T}$, причем $\min\{\gamma(\tau)\mid\tau\in\mathcal{T}\}=\min\{u'(\tau)\mid\tau\in\mathcal{T}\}$, $\mathcal{T}_*=\{\tau\in\mathcal{T},\ u'(\tau)=\gamma(\tau)\}$.

2. $\mathcal{T}_*\cap\mathcal{T}(\mathcal{N}')$ совпадает с множеством тех $\tau\in\mathcal{T}(\mathcal{N}')$, для которых $\tau_j^{-2}\operatorname{Tr} UW_j(\tau)U^*=U'(\tau)$, $j\in\mathcal{N}'$, $u_j(\tau)\leqslant u'(\tau)$, $j\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}'$, где $W_j(\tau)=\partial V^{-1}(\tau)/\partial\tau_j^{-1}=\tau^2V^{-1}(\tau)V_jV^{-1}(\tau)$ для $\tau_j>0$, $j=1,\ldots,m$.

3. Если $\dim\overline{\mathcal{R}}=\dim\mathcal{R}$, то

$$V^{-1}(\tau)=A^{-1}\Sigma(\tau)A^{*-1}=A^{-1}\begin{pmatrix}\Sigma_0 & & 0\\ & \tau_1^{-1}\Sigma_1 & \\ & & \ddots\\ 0 & & \tau_m^{-1}\Sigma_m\end{pmatrix}\text{ и } W_j(\tau)=$$

$$=A^{-1}S_jA^{*-1}=W_j, \tag{9}$$

где

$$S_j=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \Sigma_j & \\ & & & \ddots\\ 0 & & & 0\end{pmatrix},\ j=0,\ldots,m.$$

В этом случае $\mathcal{T}_*=\mathcal{T}_*\cap\mathcal{T}(\mathcal{N}_+)$, где $\mathcal{N}_+\{j\in\mathcal{N},\ \operatorname{Tr} UW_jU^*>0\}$, причем $\mathcal{T}_*$ содержит единственную стратегию τ_0:

$$\tau_j^0=(\operatorname{Tr} UW_jU^*)^{1/2}/\sum_{i\in\mathcal{N}_+}(\operatorname{Tr} UW_iU^*)^{1/2},$$

$$j\in\mathcal{N}_+,\ \tau_j^0=0,\ j\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_+ \text{ и } \min\{u(\tau)\mid\tau\in\mathcal{T}\}=$$

$$=\Big(\sum_{j\in\mathcal{N}_+}(\operatorname{Tr} UW_jU^*)^{1/2}\Big)^2+\operatorname{Tr} UW_0U^*.$$

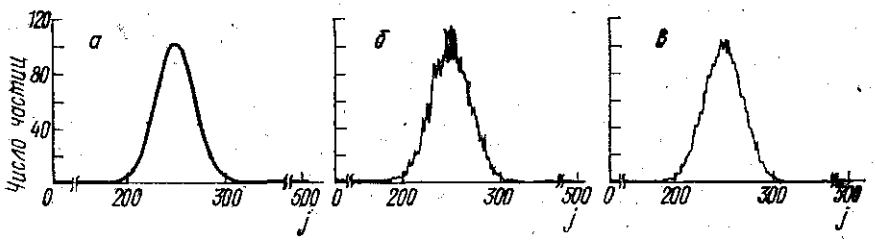
Доказательство леммы аналогично приведенному в [1]. ▲

Согласно (8), (9) $u_0(\tau)=u_0=\text{const}$. Рассмотрим, как изменится шум $u'(\tau)$ в результате оптимизации измерения. Определим эффективность планирования: $e=u'(\bar\tau)/u'(\tau^0)-1$, тогда

$$e=\Big[\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^2-\Big(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Big)^2\Big]\Big/\Big(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Big)^2, \tag{10}$$

где $\lambda_j=(\operatorname{Tr} UW_jU^*)^{1/2}$, $j=1,\ldots,m$, τ^0 — оптимальная стратегия, $\bar\tau=\{1/m,\ldots,1/m\}$. Эффективность e определена как относительное подавление шума при переходе от стратегии $\bar\tau$ к оптимальной стратегии τ^0 и характеризуется относительным разбросом чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Выражение (10) можно истолковать как дробь (дисперсия λ)/(квадрат среднего λ), где λ принимает значения $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Согласно (10) выигрыш от оптимизации тем больше, чем больше относительный разброс чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$.

В качестве примера рассмотрим эксперимент, состоящий в измерении потока рассеянных частиц при различных углах рассеяния. При этом погрешность измерения будет определяться фоном и статистической ошибкой, которая пропорциональна интенсивности рассеяния в данном направлении и, как правило, приближенно известна. Рисунок иллюстрирует повышение экспериментальной точности в результате оптимизации измерений.



Количество частиц, рассеянных в j-м направлении ($j=1, \ldots, 500$). Исходный сигнал (*а*). Результат измерения с равномерным распределением времени; шум оценки 5013 (*б*). Результат измерения с перераспределением времени согласно оптимальной стратегии; шум оценки 1013 (*в*). Шум снижен в 4,95 раза

Результат, приведенный в утверждении 3 леммы 1, можно использовать и в случае $\dim \overline{\mathcal{R}}=q \geqslant \dim \mathcal{R}=n$. Для этого, как и в [1], рассмотрим схему

$$\xi=(A, A')\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}+\nu; \quad \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \in (\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}'),$$

в которой добавлены фиктивные переменные $f' \in \mathcal{R}'$, $\dim \mathcal{R}'=\dim \overline{\mathcal{R}}-\dim \mathcal{R}$ и оператор $A' \in (\mathcal{R}' \to \overline{\mathcal{R}})$ выбран так, чтобы оператор $(A, A') \in (\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}' \to \overline{\mathcal{R}})$ был невырожден. Тогда согласно теореме 1 для оператора $Z=(U, 0) \in (\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}' \to U)$ существует единственная оценка

$$Z\begin{pmatrix} \hat{f} \\ f' \end{pmatrix}=U\hat{f}=Uf+(U, 0)(A, A')^{-1}\nu. \tag{11}$$

Лемма 2 [1]. Пусть $\mathcal{A}_0=\{A' \in (\mathcal{R}' \to \overline{\mathcal{R}}), \mathcal{N}(A')=\{0\}$ и $U\tilde{f}$ — оценка Uf, найденная из (2), $U\hat{f}$ — оценка (11) (зависящая от A'). Тогда для всякого оператора $U \in (\mathcal{R} \to \mathcal{U})$

$$\inf\{E\|U(\tilde{f}-f)\|^2 \mid A' \in \mathcal{A}_0\}= \\ =\min\{E\|U(\hat{f}-f)\|^2 \mid A' \in \mathcal{A}_0\}=E\|U(\hat{f}-f)\|^2, \tag{12}$$

причем минимум в (12) достигается на некотором $A' \in A_0$, не зависящем от U и удовлетворяющем условию

$$A^*\Sigma^{-1}A'=0. \ \blacktriangle \tag{13}$$

В работе [1] показано, что $\min\{u(\tau) \mid \tau \in \mathcal{T}\}=\min\{u_*(A') \mid A' \in \mathcal{A}_0)$, где $u_*(A')=\min\{\bar{u}(\tau, A') \mid \tau \in \mathcal{T}\}$ и $\bar{u}(\tau, A')$ — шум оценки $u\hat{f}$ (см. лемму 2). На основании этого можно получить оценку эффективности e в рассматриваемом случае $\dim \overline{\mathcal{R}} \geqslant \dim \mathcal{R}$. Из (13) и леммы 1 следует

$$u(\tau^0) \leqslant \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\right)^2+\lambda_0^2,$$

$$u(\bar{\tau}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 + \lambda_0^2, \tag{14}$$

где $\lambda_j = \mathrm{Tr}\, UV^{-1}(\tau) V_j V^{-1}(\bar{\tau}) U^*$, $j=0, \ldots, m$. Если серия, на которую планирование не распространяется, отсутствует, то $A_0=0$ и $\lambda_0=0$. Тогда из (14) получаем для эффективности планирования

$$e \geqslant \left[\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2\right] \Big/ \left[\frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2\right)\right] - 1. \tag{15}$$

Если $\dim \mathcal{R} = \dim \bar{\mathcal{R}}$, то в (15) имеет место равенство.

Аналогично теореме 3 [1] можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $\dim \bar{\mathcal{R}} \geqslant \dim \mathcal{R}$. Тогда всякая оптимальная стратегия τ^0 измерения для оценки вектора Uf дается равенством

$$\tau_j^0 = \|\overset{0}{Y} S_j^{1/2}\|_2 \Big/ \sum_{i=1}^{m} \|\overset{0}{Y} S_i^{1/2}\|_2, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где оператор $\overset{0}{Y}$ является решением выпуклой задачи:

$$\min \left\{\left[\sum_{j=1}^{m} \|YS_j^{1/2}\|_2\right]^2 + \|YS_0^{1/2}\|_2^2 \,|\, Y \in (\bar{\mathcal{R}} \to \mathcal{U}),\ YA = U\right\} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{m} \|\overset{0}{Y} S_j^{1/2}\|_2\right]^2 + \|\overset{0}{Y} S_0^{1/2}\|_2^2. \ \blacktriangle$$

§ 4. **Модель с априорной информацией.** В модели измерений с априорной информацией дополнительно известно, что $f \in \mathcal{R}$ — случайный вектор с корреляционным оператором $F \in (\mathcal{R} \to \mathcal{R})$, $(Ef(x, f) = Fx$, $x \in \mathcal{R})$. В этом случае шум оценки Uf определяется выражением (8), что иначе можно записать в виде

$$u(\tau) = \mathrm{Tr}\, U \left[\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ A \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma^{-1}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ A \end{pmatrix}\right]^{-1} U^*,$$

где $\tilde{A} \in (\mathcal{R} \to \tilde{\mathcal{R}})$ и $\tilde{\Sigma} \in (\tilde{\mathcal{R}} \to \tilde{\mathcal{R}})$ выбираются так, чтобы $A^* \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{A} = F^{-1}$. Это, очевидно, можно сделать различными способами. Например, $\tilde{A} = I$, $\tilde{\Sigma} = F$.

Отсюда видно, что выражение для шума получается таким же, как в схеме

$$\tilde{\xi} = \tilde{A} f + \nu, \ \xi_j = A_j f + \nu_j, \ j = 1, \ldots, m,$$

в которой время перераспределяется между последними m сериями. Таким образом, формально задача сводится к исследованной выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1983, 24, № 4, с. 24. [2] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1982, 118, № 1, с. 19. [3] Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
01.11.82