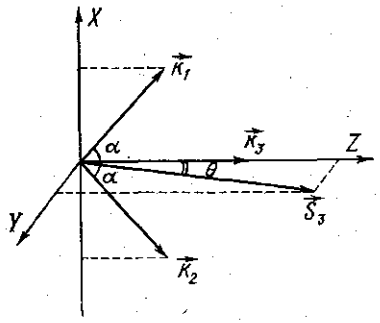
УДК 535:621.375.8

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКОГО ПИКОСЕКУНДНОГО СПЕКТРОХРОНОГРАФА

И. Ю. Пирогова, А. П. Сухоруков

(кафедра общей физики и волновых процессов)

В лазерной спектроскопии пикосекундного и субпикосекундного диапазонов весьма актуальна проблема регистрации временной и спектральной структуры сверхкоротких импульсов. Для этой цели привлекаются, в частности, нелинейно-оптические методы, использующие неколлинеарные взаимодействия световых пучков в нелинейных кристаллах. Еще в 1966 г. Джордмейном [1] была высказана идея измерения длительности коротких импульсов методом неколлинеарного удвоения частоты. В работах Кривощекова и др. [2—4] на основе более детального анализа этого метода была найдена связь «отпечатка» импульса второй гармоники на выходной грани нелинейного кристалла с длительностью и формой импульса накачки; отмечались преимущества данного метода по сравнению с другими нелинейно-оптическими методами измерения длительности (см., например, [2]). Однако помимо измерения длительности короткого импульса метод неколлинеарного преобразования частоты дает возможность одновременно проводить измерение спектров этих импульсов [5, 6]. Таким образом, неколлинеарное преобразование частоты является простым, надежным и чувствительным способом измерения частотно-временных характеристик импульсов.



Ориентация волновых векторов $\mathbf{k}_j$ ($j=1, 2, 3$) и лучевого вектора возбужденной волны $\mathbf{S}_3$

Настоящая работа посвящена разработке теории нелинейно-оптического спектрохронографа. Нами строго показано, что при неколлинеарной генерации второй гармоники в кристалле с критическим синхронизмом измерения пространственно-угловой картины излучения второй гармоники в двух взаимно перпендикулярных поперечных направлениях дают информацию как о длительности оптического импульса, так и о его спектральном составе.

Рассмотрим генерацию суммарной частоты при неколлинеарном взаимодействии оптических волн в двулучепреломляющем кристалле. Пусть на границу нелинейной среды падают два импульса накачки очень малой длительности ($\tau \sim 10^{-12}$ с). В области их перекрытия в кристалле возникает поле на суммарной частоте. Будем считать нелинейную среду недиссипативной (процесс идет в области прозрачности кристалла) и пренебрежем дисперсионным расплыванием волновых пакетов (длина кристалла меньше дисперсионной длины $l_д = \frac{\tau^2}{2}\left|\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|^{-1}$). Припишем величинам, связанным с волнами накачки, индексы 1 и 2, а величинам, связанным с возбужденной волной, — индекс 3. Ось Z направим внутрь кристалла, оси X и Y — вдоль

его входной грани. Пусть условие фазового синхронизма выполнено для случая $o_1o_2 - e_3$ взаимодействия: $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$. Волновые векторы $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ лежат в плоскости XoZ, а лучевой вектор S_3 выходит из нее (рисунок).

В приближении заданного поля система укороченных уравнений для амплитуд A_j $(j=1, 2, 3)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{u_1}\frac{\partial A_1}{\partial t} + (\mathbf{l}_1\nabla) A_1 = 0, \quad \frac{1}{u_2}\frac{\partial A_2}{\partial t} + (\mathbf{l}_2\nabla) A_2 = 0,$$

$$\frac{1}{u_3}\frac{\partial A_3}{\partial t} + (\mathbf{l}_3\nabla) A_3 = i\gamma_3 A_1 A_2, \tag{1}$$

где $u_j = \partial\omega_j/\partial k_j$ — групповые скорости импульсов накачки $(j=1, 2)$ и генерируемого импульса $(j=3)$, $\mathbf{l}_j$ — единичный вектор в направлении лучевого вектора $\mathbf{S}_j$, $\gamma_3 = \frac{4\pi\omega_3^2}{c^2 k_3}\mathbf{l}_3\hat{\chi}\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2$ — коэффициент нелинейной связи. В нашем случае компоненты векторов $\mathbf{l}_j$ имеют вид:

$$\mathbf{l}_1 = \{\sin\alpha, 0, \cos\alpha\}, \quad \mathbf{l}_2 = \{-\sin\alpha, 0, \cos\alpha\},$$
$$\mathbf{l}_3 = \{\sin\theta\cos\varphi, \ \sin\theta\sin\varphi, \ \cos\theta\},$$

где θ, φ — углы, характеризующие вектор $\mathbf{S}_3$ в сферической системе координат, α — угол, который составляет волновой вектор k_j $(j=1, 2)$ с осью Z.

Система уравнений (1) с граничными условиями

$$A_1|_{z=0} = A_{10}\left(t - \frac{x\sin\alpha}{u_1}, x, y\right), \quad A_2|_{z=0} = A_{20}\left(t + \frac{x\sin\alpha}{u_2}, x, y\right), \quad A_3|_{z=0} = 0$$

решалась методом характеристик. Полученное выражение для амплитуды A_3 имеет следующий вид:

$$A_3(t, x, y, z) = i\gamma\int_0^z dz' A_{10}\left[t - b_3 z + z'\left(b_3 - \frac{\cos\alpha}{u_1} - b_1\frac{\sin\alpha}{u_1}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\sin\alpha}{u_1}(x - b_1 z), \ x - b_1 z + b_1 z' - z'\operatorname{tg}\alpha, \ y - b_2 z + b_2 z'\right] \times$$
$$\times A_{20}\left[t - b_3 z + z'\left(b_3 - \frac{\cos\alpha}{u_2} + b_1\frac{\sin\alpha}{u_2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin\alpha}{u_2}(x - b_1 z), x - b_1 z + b_1 z' + z'\operatorname{tg}\alpha, y - b_2 z + b_2 z'\right].$$

Здесь введены обозначения: $\gamma = \gamma_3/\cos\theta$, $b_1 = \operatorname{tg}\theta\cdot\cos\varphi$, $b_2 = \operatorname{tg}\theta\cdot\sin\varphi$, $b_3 = (u_3\cos\theta)^{-1}$.

Далее рассмотрим случай, когда вектор $\mathbf{S}_3$ лежит в плоскости YoZ. При этом угол $\varphi = \pi/2$ и $b_1 = 0$. Пусть, кроме того, $k_{1x} = \text{const}$, $k_{2x} = \text{const}$ (широкие вдоль оси x пучки). Тогда разложение амплитуд A_1 и A_2 в спектр будем вести только по частоте и проекции волнового вектора на ось Y.

Перейдем от амплитуды A_3 к ее угловому спектру:

$$\mathcal{S}_{3,k}(t, x, k_y) = \frac{i\gamma}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{ik_y b_2 z}{2}\right\} S_1(\omega_1, k_{1y}) S_2(\omega_2, k_y - k_{1y}) \times$$
$$\times \exp\left\{i\left[\omega_1\left(t - \frac{b_3}{2}z - \frac{x\sin\alpha}{u_1} - \frac{z\cos\alpha}{2u_1}\right) + \right.\right.$$

$$+\omega_2\left(t-\frac{b_3}{2}z+\frac{x\sin\alpha}{u_2}-\frac{z\cos\alpha}{2u_2}\right)\Bigg]\Bigg\}\times$$

$$\times\operatorname{sinc}\left\{\frac{z}{2}\left[\omega_1\left(b_3-\frac{\cos\alpha}{u_1}\right)+\omega_2\left(b_3-\frac{\cos\alpha}{u_2}\right)+k_yb_2\right]\right\}d\omega_1d\omega_2dk_{1y},\quad(2)$$

где функция $\operatorname{sinc}\xi=\sin\xi/\xi$. При больших длинах кристалла

$$z\gg\left[\Delta\omega_1\left(b_3-\frac{\cos\alpha}{u_1}\right)+\Delta\omega_2\left(b_3-\frac{\cos\alpha}{u_2}\right)\right]^{-1}$$

эту функцию в подынтегральном выражении в (2) можно считать δ-функцией. Учитывая этот факт и принимая во внимание то обстоятельство, что обычно частотно-угловой спектр разделяется на частотный и угловой спектры $S(\omega,\ k)=S_\omega(\omega)\cdot S_k(k)$, выражение (2) можно представить таким образом:

$$S_{3,k}(t,\ x,\ k_y)=\frac{\gamma z}{16\pi^2}\exp\left\{-ik_yb_2\left[\frac{z}{2}+\frac{t-b_3\frac{z}{2}+\frac{x\sin\alpha}{u}-\frac{z\cos\alpha}{(2u)}}{b_3-\frac{\cos\alpha}{u}}\right]\right\}\times$$

$$\times\int S_{1,\omega}(\omega_1)\,S_{2,\omega}(-\omega_1-\omega_k)\exp\left\{-i\omega_1\frac{2x\sin\alpha}{u}\right\}d\omega_1\times$$

$$\times\int S_{1,k}(k_{1y})\,S_{2,k}(k_y-k_{1y})\,dk_{1y},\quad(3)$$

здесь

$$\omega_k=\frac{k_yb_2}{b_3-\cos\alpha/u}.\quad(4)$$

Возвращаясь от $S_{1,2}$ к амплитудам $H_{1,2}$ в том случае, когда функция A_j представима в виде произведения временной и координатной зависимостей $A_j=F_{jt}\cdot F_{jy}$ $(j=1,\ 2)$, находим окончательное выражение для спектральной амплитуды рассматриваемого излучения:

$$S_{3,k}(t,\ x,\ k_y)=\frac{\gamma z}{4}\exp\left\{-ik_yb_2\left[\frac{z}{2}+\frac{t-b_3\frac{z}{2}+\frac{x\sin\alpha}{u}-\frac{z\cos\alpha}{(2u)}}{b_3-\frac{\cos\alpha}{u}}\right]\right\}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}F_{1t}(t')\,F_{2t}\left(t'+\frac{2x\sin\alpha}{u}\right)\exp\left\{i\omega_k\left(t'+\frac{2x\sin\alpha}{u}\right)\right\}dt'\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}F_{1y}(y')\,F_{2y}(y')\exp\{ik_yy'\}\,dy',\quad(5)$$

где $t'=t-b_3z-\frac{\sin\alpha}{u}x+z'\left(b_3-\frac{\cos\alpha}{u}\right)$, $y'=y-b_2z+b_2z'$.

Исследуем это выражение. В направлении $k_y=0$ все экспоненциальные множители в (5) обращаются в единицу, и это выражение представляет из себя свертку функций A_1 и A_2:

$$S_{3,k}(t,\ x,\ k_y=0)=\frac{\gamma z}{4}\int_{-\infty}^{\infty}F_{1t}(t')\,F_{2t}\left(t'+\frac{2x\sin\alpha}{u}\right)dt'\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} F_{1y}(y') F_{2y}(y') dy' \sim f\left(\frac{2x \sin\alpha}{u}\right),$$

здесь $f(2x \sin\alpha/u)$ — некоторая функция, описывающая профиль пучка по координате x.

В плоскости $x=0$ (т. е. плоскости YoZ) выражение (5) дает спектр излучения на суммарной частоте:

$$S_{3,k}(t, x=0, k_y) = \frac{i\gamma z}{4} \exp\left\{-ik_y b_2 \left[\frac{z}{2} + \frac{t - \frac{b_3}{2} z + \frac{x \sin\alpha}{u} - \frac{z \cos\alpha}{2u}}{b_3 - \frac{\cos\alpha}{u}}\right]\right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} F_{1t}(t') F_{2t}(t') \exp\{i\omega_k t'\} dt' \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} F_{1y}(y') F_{2y}(y') e^{-ik_y y'} dy' \sim S_{3,k}(\omega_k, k_y) \sim S_{3,k}(k_y).$$

В качестве примера рассмотрим регистрацию излучения, модулированного в пространстве и во времени по закону Гаусса:

$$F_t(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{T^2}(1 - i\Omega T)\right\}, \quad F_y(y) = \exp\left\{-\frac{y^2}{a^2}\left(1 - \frac{ika^2}{R}\right)\right\},$$

где T — длительность импульса, a — характерная ширина пучка, R — радиус кривизны волнового фронта. Будем считать, что длительности импульсов накачки и частоты модуляции их фаз одинаковы: $T_1 = T_2$, $\Omega_1 = \Omega_2$. Выполняя при этом условии интегрирование в (5), получим:

$$|S_{3,k}(x, k_y)| \sim \exp\left\{\frac{2}{T^2}\left(\frac{x \sin\alpha}{u}\right)^2\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\omega_k^2 T^2}{8(1 + \Omega^2 T^2)} - \frac{k_y^2}{4} \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}{\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}\right)^2 + \left(\frac{k_1}{R_1} + \frac{k_2}{R_2}\right)^2 / 4}\right\}. \quad (6)$$

В направлении $k_y = 0$ второй экспоненциальный сомножитель в (6) обращается в единицу, а первый имеет вид распределения амплитуды излучения по координате по закону Гаусса:

$$|S_{3,k}(x, k_y = 0)| \sim \exp\left\{\frac{2x^2 \sin^2\alpha}{T^2 u^2}\right\}.$$

Отсюда следует, что $a_x = \frac{Tu}{\sqrt{2} \sin\alpha}$ — размер пучка по оси X, связанный, как видим, с длительностью импульса накачки. Поэтому, получив кривую зависимости интенсивности генерируемого излучения от координаты x и измерив ее характерный поперечный размер $d = 2a_x$, можно определить длительность исходного импульса:

$$T = \frac{d \sin\alpha}{\sqrt{2} u}.$$

В плоскости $x=0$ при условии, что второе слагаемое в квадратных скобках в (6) много меньше первого, формула (6) принимает вид

$$|S_{3,k}(x=0,\ k_y)| \sim \exp\left\{-\frac{\omega_k^2 T^2}{8(1+\Omega^2 T^2)}\right\}$$

и по существу представляет собой частотный спектр гауссовского импульса. В то же время входящая в показатель экспоненты переменная ω_k связана с k_y формулой (4). Можно построить кривую экспериментальной зависимости интенсивности излучения от величины k_y (угловой спектр), а затем перейти от шкалы волновых векторов k_y к шкале частот с помощью соотношения

$$\omega-\omega_0=\frac{b_2}{\sqrt{2}\left(b_3-\frac{\cos\alpha}{u}\right)}k_y$$

и получить, таким образом, частотный спектр исследуемого сигнала (ω_0 — центральная частота спектра).

Описанный метод позволяет осуществлять измерение длительностей в интервале 10^{-13}—10^{-10} с [6]. Нами был произведен расчет дисперсии направления синхронизма в случае удвоения частоты ($\lambda=1{,}06$ мкм$\rightarrow\lambda=0{,}53$ мкм)

$$\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\lambda}=\frac{2\sqrt{2}\pi c\left[\frac{1}{(u_3\cos\theta)}-\frac{\cos\alpha}{u}\right]}{\lambda^2 k\,\mathrm{tg}\,\theta}$$

для различных типов спектрохронографов. Он дал следующие результаты. Для спектрохронографов, собранных на основе кристаллов иодата лития, *KDP* и *ADP* $\Delta\theta_1/\Delta\lambda=0{,}06$; 0,16 и 0,12 угл. мин/Å соответственно.

Заметим, что описанный прибор имеет уже существующие аналоги. В работах [7, 8] было рассмотрено устройство и исследованы характеристики так называемого панорамного нелинейного спектрографа, основанного на неколлинеарном смешении частот в нелинейном кристалле. В таком приборе ввиду дисперсии синхронизма на выходе кристалла происходит угловая развертка преобразованного спектра, что позволяет проводить анализ спектральной структуры лазерного излучения. На этом же принципе основано исследование спектра оптического импульса и в нашем приборе, но в отличие от панорамного спектрографа, где наблюдение за спектром ведется в плоскости падения лазерных лучей, в предлагаемом приборе спектр регистрируется в перпендикулярной ей плоскости. Кроме того, большим преимуществом спектрохронографа является возможность одновременного проведения двух операций: исследования спектра и измерения длительности короткого импульса, при этом следует отметить существенную простоту проведения эксперимента (не требуется использование дополнительных диспергирующих устройств; измерение параметров одиночного импульса производится за одну вспышку).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Giordmain J. A., Maier M., Kaiser W. Phys. Rev. Lett., 1966, 17, N 26, p. 1275. [2] Кривощеков Г. В., Строганов В. И. В кн.: Нелинейные процессы в оптике. Новосибирск: Наука, 1970, с. 103—105. [3] Кривощеков Г. В. и др. Опт. и спектр., 1971, 31, № 1, с. 116. [4] Кривощеков Г. В., Никулин И. Г., Соколовский Р. И. Автометрия, 1971, № 1, с. 89. [5] Телегин Л. С., Бремзер В. В кн.: Тез. докл. IX Всесоюз. конф. по когерентной и не-

линейной оптике. Ч. 2. Л., 1978, с. 158. [6] Сухорукова А. К. и др. Изв. АН СССР, сер. физ., 1981, 45, № 8, с. 1562. [7] Волосов В. Д. ЖТФ, 1968, 38, № 10, с. 1769. [8] Волосов В. Д., Калинцев А. Г. Квант. электроника, 1976, 3, № 4, с. 798.

Поступила в редакцию
12.11.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 5

УДК 539.17.01

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДВУХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ НА ТРЕТЬЕЙ ТЯЖЕЛОЙ ЧАСТИЦЕ

А. М. Попова, Ю. В. Попов
(НИИЯФ)

§ 1. **Введение.** Как известно, многие атомные явления, ядерные реакции с тяжелыми ионами, а также реакции взаимодействия квантовых частиц с твердым телом можно рассматривать как задачи трех тел в предположении, что масса одной из частиц бесконечно большая. Казалось бы, для теоретического описания указанных процессов можно воспользоваться интегральными уравнениями Фаддеева, записанными для случая трех частиц конечной массы, выполнив в этих уравнениях предельный переход к бесконечному пределу по массе одной из частиц. Однако, как показано в работах [1, 2], такие предельные уравнения теряют свойства исходной фредгольмовской системы уравнений задачи трех тел. Для численного решения с помощью известных методов предельные уравнения необходимо перестроить и свести их к уравнениям задачи двух частиц во внешнем поле.

Пояснить этот результат можно тем, что предельный переход от задачи трех тел конечной массы к задаче, в которой одна частица становится бесконечно тяжелой, является не непрерывным.

Во-первых, частица, масса которой стремится к бесконечности, в пределе перестает быть квантовой. Это проявляется в том, что, например, в методе вторичного квантования операторы рождения и уничтожения такой частицы превращаются в c-числа.

Во-вторых, при переходе к бесконечному пределу по массе одной из частиц в задаче трех тел появляется выделенная система координат. В результате этого теряется имеющаяся в задаче трех тел с конечными массами инвариантность трех эквивалентных систем координат и, кроме того, перестает выполняться закон сохранения импульса.

В-третьих, уравнения Фаддеева после предельного перехода по массе одной из частиц становятся сингулярно-возмущенными уравнениями и, как показано в работе [3], могут иметь решения, не удовлетворяющие заданным граничным условиям. Заметим, что к аналогичным по характеру сингулярностей следует отнести уравнения Фаддеева, записанные для случая кулоновского взаимодействия между частицами.

Однако, как будет показано ниже, уравнения Фаддеева для рассеяния двух легких частиц на третьей бесконечно тяжелой частице могут быть перестроены и сведены к численно решаемым уравнениям задачи двух тел во внешнем поле.

§ 2. **Вид сингулярностей в уравнениях Фаддеева для случая рассеяния двух частиц на бесконечно тяжелой частице.** Рассмотрим задачу о рассеянии трех частиц, одна из которых имеет бесконечно большую массу. Гамильтониан такой трехчастичной задачи запишем в им-