СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Соколов А. А., Клепиков Н. П., Тернов И. М. ЖЭТФ, 1953, **24**, с. 249. [2] Schwinger J. Proc. NAS, 1954, **40**, p. 132. [3] Jackson J. D. Rev. Mod. Phys., 1976, **48**, p. 417. [4] Schwinger J., Wu-yang Tsei. Ann. Phys., 1978, **110**, p. 63. [5] Соколов А. А. Изв. вузов. Сер. Физика, 1980, № 2, с. 46. [6] Бордовицын В. А. и др. Изв. вузов. Сер. Физика, 1978, № 5, с. 12; 1980, № 5, с. 108; 1982, № 10, с. 33; 1982, № 2, с. 3. [7] Тернов И. М., Бордовицын В. А., Разина Г. К. Изв. вузов. Сер. Физика, 1981, № 1, с. 44. [8] Тернов И. М., Бордовицын В. А. УФН, 1980, **132**, с. 345; Ann. Phys., 1982, **42**, N 4, p. 295. [9] Бордовицын В. А. Изв. вузов. Сер. Физика, 1982, № 3, с. 106. [10] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974. [11] Матвеев А. Н. ЖЭТФ, 1955, **29**, с. 700; 1956, **31**, с. 479. [12] Багров В. Г. Канд. дис. М.: МГУ, 1964.

Поступила в редакцию
25.10.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 5

УДК 531.5

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ В ОБОБЩЕННЫХ ТЕОРИЯХ ГРАВИТАЦИИ

В. В. Трефилов, Н. Ф. Нелипа

(НИИЯФ)

1. Как известно [1], в общей теории относительности (ОТО) широко используются два характеристических класса:

$$^*\chi = \sqrt{g}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\mu\nu\cdot\cdot}^{\ \ \alpha\beta}R_{\lambda\rho\cdot\cdot}^{\ \ \gamma\delta} \text{ (класс Эйлера)}, \tag{1}$$

$$^*c_2 = \sqrt{g}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\alpha\cdot}^{\ \ \ \ \beta}R_{\lambda\rho\beta\cdot}^{\ \ \ \ \alpha} \text{ (класс Чженя)}, \tag{2}$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, $g = |\det\|g_{\mu\nu}\||$, $R_{\mu\nu\alpha\cdot}^{\ \ \ \ \beta}$ — тензор кривизны и $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ — тензор Леви—Чевита ($\varepsilon_{0123} = \sqrt{g}$).

Существуют также два других класса Чженя:

$$c_{1\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\cdot}^{\ \ \ \ \alpha}, \quad ^*(c_1 \wedge c_1) = \sqrt{g}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\alpha\cdot}^{\ \ \ \ \alpha}R_{\lambda\rho\beta\cdot\cdot}^{\ \ \ \ \ \ \beta}. \tag{3}$$

Для теорий со связностями, сохраняющими метрику (в том числе и для ОТО), классы (3) равны нулю.

В общей теории относительности интегралы

$$\int {}^*\chi d^4x, \quad \int {}^*c_2 d^4x \tag{4}$$

не зависят от метрики. Вследствие этого они определяются только топологическим строением пространства-времени [2].

В большинстве обобщений ОТО используется более сложная, чем риманова, геометрическая структура пространства-времени (см., например, [3]). Цель настоящей работы — исследовать, в каких пространствах аффинной связности существуют топологические инварианты, аналогичные (4). Для этого необходимо выяснить, для каких типов связностей вариационные производные от (1), (2) и (3) по независимым переменным $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ тождественно равны нулю.

2. Покажем, что классы Чженя являются полными производными. Тогда равенство нулю их вариационных производных выполняется автоматически. Для этого воспользуемся выражением для тензора кривизны:

$$R_{\mu\nu\alpha\cdot}^{\ \ \ \ \beta} = \Gamma_{\nu\alpha,\mu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\varkappa}^{\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^{\varkappa} - \Gamma_{\nu\varkappa}^{\beta}\Gamma_{\mu\alpha}^{\varkappa}.$$

Подставляя его в (2) и (3) и принимая во внимание, что

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\Gamma^{\beta}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\varkappa}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\rho\beta})=0,$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu(\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\varkappa}\Gamma^{\varkappa}_{\rho\beta})=3\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha,\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\varkappa}\Gamma^{\varkappa}_{\rho\beta}),$$

получим выражения для классов Чженя в форме полных производных:

$$c_{1\mu\nu}=\Gamma^{\varkappa}_{\nu\varkappa,\mu}-\Gamma^{\varkappa}_{\mu\varkappa,\nu}, \tag{5}$$

$$^*(c_1\wedge c_1)=\partial_\mu(4\sqrt{g}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\Gamma^{\varkappa}_{\nu\varkappa}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma,\lambda}), \tag{6}$$

$$^*c_2=\partial_\mu\left(4\sqrt{g}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\left[\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\rho\beta,\lambda}+\frac{2}{3}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\varkappa}\Gamma^{\varkappa}_{\rho\beta}\right]\right). \tag{7}$$

Формулы (5)—(7) справедливы для связностей $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ любого типа.

3. Рассмотрим класс Эйлера (1). Покажем сначала, что его вариационная производная по g_{ij} тождественно равна нулю.

В 4-мерном пространстве существует единственный с точностью до множителя вполне антисимметричный тензор четвертого ранга, поэтому

$$R_{[\mu\nu}{}^{[\alpha\beta}R_{\lambda\rho]}{}^{\gamma\delta]}=K\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{8}$$

$$^*\chi=(4!)^2\sqrt{g}\,K=-4!\sqrt{g}\,R_{[\mu\nu}{}^{[\alpha\beta}R_{\lambda\rho]}{}^{\gamma\delta]}\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\delta}. \tag{9}$$

Используя формулу (9), находим:

$$\frac{\delta^*\chi}{\delta g_{ij}}=\frac{\partial^*\chi}{\partial g_{ij}}=-4!\sqrt{g}\,\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\delta}\{g^{ij}R_{[\mu\nu}{}^{[\alpha\beta}R_{\lambda\rho]}{}^{\gamma\delta]}-$$
$$-2g^{\alpha i}R_{[\mu\nu}{}^{[j\beta}R_{\lambda\rho]}{}^{\gamma\delta]}-2g^{\alpha j}R_{[\mu\nu}{}^{[i\beta}R_{\lambda\rho]}{}^{\gamma\delta]}\}.$$

Подставляя сюда соотношение (8), приходим к искомому результату:

$$\frac{\delta^*\chi}{\delta g_{ij}}=-4!\sqrt{g}\,K\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}[g^{ij}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}-2g^{i\mu}\varepsilon^{j\nu\lambda\rho}-2g^{j\mu}\varepsilon^{i\nu\lambda\rho}]=$$
$$=4!\sqrt{g}\,K[4!\,g^{ij}-2\cdot3!\,g^{i\mu}\delta^{j}_{\mu}-2\cdot3!\,g^{j\mu}\delta^{i}_{\mu}]=0.$$

4. Исследуем теперь вариационную производную от $^*\chi$ по Γ_{ij}^{k}:

$$\frac{\delta^*\chi}{\delta\Gamma^{k}_{ij}}=2\sqrt{g}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\left\{\frac{\partial R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}}{\partial\Gamma^{k}_{ij}}R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta}-\frac{d}{dx^l}\left[\frac{\partial R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}}{\partial\Gamma^{k}_{ij,l}}R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta}\right]\right\}. \tag{10}$$

Так как она ковариантна, то ее значение в произвольной точке x_0 проще всего вычислить, используя геодезические координаты [4] в окрестности этой точки. При таком выборе локальных координат

$$g_{\mu\nu,\lambda}(x_0)=0,\quad {}^0\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x_0)=0, \tag{11}$$

где

$${}^0\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\varkappa}(g_{\mu\varkappa,\nu}+g_{\nu\varkappa,\mu}-g_{\mu\nu,\varkappa}).$$

Определим тензор

$$F^{\lambda}_{\mu.\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-{}^0\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}, \tag{12}$$

характеризующий отклонение связности $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ от римановой ${}^0\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Тогда для вариационной производной (10) в точке x_0 находим:

$$\frac{\delta^*\chi}{\delta\Gamma^{k}_{ij}}(x_0)=4\sqrt{g}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\{\delta^{i}_{\mu}g_{kl}[g^{\beta l}F_{\nu}{}^{j\alpha}-$$
$$-g^{\alpha j}F_{\nu}{}^{\beta l}]R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta}+\delta^{i}_{\mu}\delta^{\beta}_{k}g^{\alpha j}\partial_\nu R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta}\}. \tag{13}$$

Чтобы выразить значение производной $\partial_\nu R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta}_{..}$ в точке x_0 через ковариантные величины, воспользуемся первым тождеством Бианки:

$$\nabla_{[\nu}R_{\lambda\rho]\varkappa}{}^{\sigma}_{.} = 2\Gamma^{\tau}_{[\lambda\rho}R_{\nu]\tau\varkappa}{}^{\sigma}_{..}.$$

В точке x_0, если учесть (11), оно принимает вид

$$\partial_{[\nu}R_{\lambda\rho]}{}^{\gamma\delta}_{..} = -F_{[\nu}{}^{\varkappa\gamma}_{..}R_{\lambda\rho]\varkappa}{}^{\delta}_{.} + F_{[\nu.|\varkappa|}{}^{\delta}_{.}R_{\lambda\rho]}{}^{\gamma\varkappa}_{..}.$$

Подставив это соотношение в (13), получим выражение для вариационной производной уже в явно ковариантной форме:

$$\frac{\delta^*\chi}{\delta\Gamma^k_{ij}} = 4\sqrt{g}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\{\delta^i_\mu g_{kl}[g^{\beta l}F_\nu{}^{j\alpha}_{..} - g^{\alpha j}F_\nu{}^{\beta l}_{..}]R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta}_{..} +$$

$$+\delta^i_\mu\delta^\beta_k g^{\alpha j}[F_\nu{}^{\varkappa\gamma}_{..}R_{\lambda\rho\varkappa}{}^{\delta}_{.} - F_{\nu.\varkappa}{}^{\delta}_{.}R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\varkappa}_{..}]\}. \qquad (14)$$

5. Теперь выясним, для каких типов связностей выражение (14) обращается в ноль. Непосредственно видно, что это выполняется для римановой связности ($F_{\mu.\nu}^{\lambda} = 0$) и связности Вейля ($F_{\mu.\nu}^{\lambda} = a_\mu\delta^\lambda_\nu$) [5]. Покажем, что вариационная производная обращается в ноль и в U_4-теории [6].

В U_4-теории $F_\nu{}^{\alpha\beta}_{..} = -F_\nu{}^{\beta\alpha}_{..}$ (и соответственно $R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}_{..} = -R_{\mu\nu}{}^{\beta\alpha}_{..}$), поэтому формулу (14) можно записать в виде

$$\frac{\delta^*\chi}{\delta\Gamma^k_{ij}} = 4\sqrt{g}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\{\delta^i_\mu g_{kl}[g^{\beta l}F_\nu{}^{j\alpha}_{..} - g^{\beta j}F_\nu{}^{l\alpha}_{..}]R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta}_{..} +$$

$$+\delta^i_\mu g_{kl}[g^{\beta l}g^{\alpha j} - g^{\alpha l}g^{\beta j}]F_\nu{}^{\gamma\varkappa}_{..}R_{\lambda\rho}{}^{\delta\sigma}_{..}g_{\varkappa\sigma}\}. \qquad (15)$$

Воспользуемся тождествами:

$$g^{\beta l}F_\nu{}^{j[\alpha}_{..}R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta]}_{..} - g^{\beta j}F_\nu{}^{l[\alpha}_{..}R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta]}_{..} = 2\Delta^{jl\varkappa\beta}F_\nu{}^{[\alpha\gamma}_{..}R_{\lambda\rho}{}^{\delta]\sigma}_{..}g_{\sigma\varkappa} +$$

$$+2g^{\beta l}F_\nu{}^{[j\alpha}_{..}R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta]}_{..} - 2g^{\beta j}F_\nu{}^{[l\alpha}_{..}R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta]}_{..}, \qquad (16)$$

$$\Delta^{jl\varkappa[\beta}F_\nu{}^{\alpha\gamma]}_{..} + \Delta^{jl[\alpha\beta}F_\nu{}^{\gamma]\varkappa}_{..} = 2\Delta^{jl[\alpha\beta}F_\nu{}^{\gamma\varkappa]}_{..},$$

где $\Delta^{jl\alpha\beta}_{.} = g^{j\alpha}g^{l\beta} - g^{j\beta}g^{l\alpha}$. Учтем также, что в 4-мерном случае

$$F_\nu{}^{[j\alpha}_{..}R_{\lambda\rho}{}^{\gamma\delta]}_{..} = a_{\nu\lambda\rho}\varepsilon^{j\alpha\gamma\delta},$$

$$\Delta^{jl[\alpha\beta}F_\nu{}^{\gamma\varkappa]}_{..} = b^{jl}_{..\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varkappa}, \qquad (17)$$

где $a_{\nu\lambda\rho}$ и $b^{jl}_{..\nu}$ — тензоры, точный вид которых здесь несуществен. Подставляя (16) и (17) в формулу (15), находим:

$$\left.\frac{\delta^*\chi}{\delta\Gamma^k_{ij}}\right|_{U_4} = 8\sqrt{g}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\delta^i_\mu g_{kl}\{a_{\nu\lambda\rho}(g^{\beta l}\varepsilon^{j\alpha\gamma\delta} - g^{\beta j}\varepsilon^{l\alpha\gamma\delta}) +$$

$$+b^{jl}_{..\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varkappa}g_{\sigma\varkappa}R_{\lambda\rho}{}^{\delta\sigma}_{..}\} = 3!\,8\sqrt{g}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\delta^i_\mu g_{kl}\{a_{\nu\lambda\rho}(g^{\beta l}\delta^j_\beta - g^{\beta j}\delta^l_\beta) +$$

$$+b^{jl}_{..\nu}\delta^\varkappa_\beta g_{\varkappa\sigma}R_{\lambda\rho}{}^{\beta\sigma}_{..}\} \equiv 0.$$

6. Отметим, что выражение (1) для $^*\chi$ может быть записано в форме

$$^*\chi = 4\sqrt{g}\,\{R^2 + R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta]}_{..}R_{\gamma\delta}{}^{\alpha\beta}_{..} - 4R_{\alpha\beta}{}^{[\delta\alpha]}_{..}R_{\gamma\delta}{}^{[\beta\gamma]}_{..}\},$$

где $R = g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\nu}{}^{\alpha}$ — скаляр кривизны, которая является основой известной формулы Ланцоша—Баха [7]:

$$\delta_{g,\Gamma} \int d^4x \sqrt{g} \{R^2 + R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}{}^{\alpha\beta} - 4R_{\alpha\beta}{}^{[\delta\alpha]} R_{\gamma\delta}{}^{[\beta\gamma]}\} \equiv 0, \tag{18}$$

широко применяемой в ОТО и U_4-теории при анализе квадратичных по тензору кривизны добавок к лагранжиану гравитационного поля [8]. Из результатов данной работы следует, что формула (18) допускает обобщение только в тех пространствах, в которых $^*\chi$ является характеристическим классом. Для коэффициентов связностей $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ таких пространств выражение (14) должно обращаться в ноль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. Phys. Reports, 1980, 66, N 6, p. 213. [2] Дубровин Б. А., Новиков С. Н., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. [3] Basombrio F. G. Gen. Relat. and Gravit., 1980, 12, N 2, p. 109. [4] Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. [5] Вейль Г. В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 513. [6] Wallner R. P. Gen. Relat. and Gravit., 1980, 12, N 9, p. 719. [7] Lanczos C. Ann. Math., 1938, 39, p. 842. [8] Frolov B. N. Acta Phys. Polon., 1978, B9, N 10, p. 823.

Поступила в редакцию
25.10.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 5

УДК 533.9

СВЕРХСВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ В СЛАБОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Л. С. Кузьменков, М. И. Ситнов

(кафедра теоретической физики)

Наличие внешнего магнитного поля сильно усложняет спектр колебаний релятивистской плазмы. Поэтому изучим более простой, но практически важный случай слабого внешнего поля. В данной работе мы не рассматриваем область фазовых скоростей ω/k, меньших скорости света c.

Общее выражение для тензора диэлектрической проницаемости релятивистской бесстолкновительной магнитоактивной плазмы, приведенное в [1, с. 142], в этом случае можно упростить, используя метод стационарной фазы. Для изотропных распределений можно записать

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{B(2)}_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

где $\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}$ — тензор диэлектрической проницаемости изотропной плазмы [2—5]:

$$\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta \varepsilon_l + (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta)\, \varepsilon_{tr}, \tag{2}$$

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int d\mathbf{u} \frac{(\mathbf{un})^2 F_0'(u_0)}{u_0^2 (1 - \mathbf{kv}/\omega)}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{tr} = 1 + \frac{2\pi e^2}{m\omega^2} \int d\mathbf{u} \frac{[\mathbf{u} \times \mathbf{n}]^2 F_0'(u_0)}{u_0^2 (1 - \mathbf{kv}/\omega)}, \tag{4}$$