где $R=g^{\mu\nu}R_{\alpha\mu\nu}^{\ \ \ \ \alpha}$ — скаляр кривизны, которая является основой известной формулы Ланцоша—Баха [7]:

$$\delta_{g,\Gamma}\int d^4x\sqrt{g}\,\{R^2+R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}{}_{..}R_{\gamma\delta}{}^{\alpha\beta}{}_{..}-4R_{\alpha\beta}{}^{[\delta\alpha]}{}_{..}R_{\gamma\delta}{}^{[\beta\gamma]}{}_{..}\}\equiv 0, \tag{18}$$

широко применяемой в ОТО и U_4-теории при анализе квадратичных по тензору кривизны добавок к лагранжиану гравитационного поля [8]. Из результатов данной работы следует, что формула (18) допускает обобщение только в тех пространствах, в которых $^*\chi$ является характеристическим классом. Для коэффициентов связностей $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ таких пространств выражение (14) должно обращаться в ноль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. Phys. Reports, 1980, **66**, N 6, p. 213. [2] Дубровин Б. А., Новиков С. Н., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. [3] Basombrio F. G. Gen. Relat. and Gravit., 1980, **12**, N 2, p. 109. [4] Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. [5] Вейль Г. В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 513. [6] Wallner R. P. Gen. Relat. and Gravit., 1980, **12**, N 9, p. 719. [7] Lanczos C. Ann. Math., 1938, **39**, p. 842. [8] Frolov B. N. Acta Phys. Polon., 1978, **B9**, N 10, p. 823.

Поступила в редакцию
25.10.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 5

УДК 533.9

СВЕРХСВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ В СЛАБОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Л. С. Кузьменков, М. И. Ситнов

(кафедра теоретической физики)

Наличие внешнего магнитного поля сильно усложняет спектр колебаний релятивистской плазмы. Поэтому изучим более простой, но практически важный случай слабого внешнего поля. В данной работе мы не рассматриваем область фазовых скоростей ω/k, меньших скорости света c.

Общее выражение для тензора диэлектрической проницаемости релятивистской бесстолкновительной магнитоактивной плазмы, приведенное в [1, с. 142], в этом случае можно упростить, используя метод стационарной фазы. Для изотропных распределений можно записать

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}+\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}+\varepsilon_{\alpha\beta}^{B(2)}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}$ — тензор диэлектрической проницаемости изотропной плазмы [2—5]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}=n_\alpha n_\beta\varepsilon_l+(\delta_{\alpha\beta}-n_\alpha n_\beta)\,\varepsilon_{tr}, \tag{2}$$

$$\varepsilon_l=1+\frac{4\pi e^2}{m\omega^2}\int d\mathbf{u}\,\frac{(\mathbf{u}\mathbf{n})^2F_0'(u_0)}{u_0^2(1-\mathbf{k}\mathbf{v}/\omega)}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{tr}=1+\frac{2\pi e^2}{m\omega^2}\int d\mathbf{u}\,\frac{[\mathbf{u}\times\mathbf{n}]^2F_0'(u_0)}{u_0^2(1-\mathbf{k}\mathbf{v}/\omega)}, \tag{4}$$

$F_0(u_0)$ — фучкция распределения электронов, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\mathbf{n}=\mathbf{k}/k$; $u_0=\sqrt{1+u^2}$, $u=|\mathbf{u}|$, $\mathbf{v}=\mathbf{u}c/u_0$;

$$\varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta} = i\,(\Omega/\omega)\, e_{\beta\gamma\delta}\, h_\delta \left[n_\alpha n_\gamma g^{(1)}_l + (\delta_{\alpha\gamma} - n_\alpha n_\gamma)\, g^{(1)}_{tr}\right], \tag{5}$$

$$g^{(1)}_l = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2}\int d\mathbf{u}\,\frac{(\mathbf{u}\mathbf{n})^2 F_0'(u_0)}{u_0^3\,(1-\mathbf{k}\mathbf{v}/\omega)^2}, \tag{6}$$

$$g^{(1)}_{tr} = \frac{2\pi e^2}{m\omega^2}\int d\mathbf{u}\,\frac{[\mathbf{u}\times\mathbf{n}]^2 F_0'(u_0)}{u_0^3\,(1-\mathbf{k}\mathbf{v}/\omega)^2},$$

$$\varepsilon^{B(2)}_{\alpha\beta} = i\,\frac{4\pi e^2\Omega}{m\omega k^2 c^2}\int \frac{d\mathbf{u}}{u_0}\, F_0'(u_0)\,\frac{u_\alpha u_\beta\,(\mathbf{u},\,[\mathbf{h}\times\mathbf{n}])}{(u_0 z - \mathbf{u}\mathbf{n})^3}, \tag{7}$$

Ω — циклотронная частота, $\mathbf{h}$ — единичный вектор в направлении магнитного поля.

Наибольший интерес представляет случай $\mathbf{k}\perp\mathbf{h}$. В этом случае, как следует из (1)—(7), тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в системе координат, ось которой направлена вдоль $\mathbf{k}$, а ось z — вдоль вектора $\mathbf{h}$, будет иметь следующие ненулевые компоненты: $\varepsilon_{11}=\varepsilon_l$; $\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=\varepsilon_{tr}$;

$$\varepsilon_{21} = \frac{i\Omega}{\omega}\, g^{(1)}_{tr} + \varepsilon^{B(2)}_{21} = \frac{i\Omega}{\omega}\, g_{tr};\quad \varepsilon_{12} = \frac{\Omega}{i\omega}\, g^{(1)}_l + \varepsilon^{B(2)}_{12} = \frac{\Omega}{i\omega}\, g_l.$$

Поэтому общее дисперсионное уравнение

$$\det\left(z^2\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta\right) = 0 \qquad (z=\omega/kc) \tag{8}$$

распадается на два независимых уравнения, описывающих обыкновенную и необыкновенную волну. Дисперсия обыкновенной волны в релятивистской плазме с конечной температурой в первом приближении по полю совпадает с дисперсией поперечной волны в незамагниченной плазме. Дисперсия необыкновенных волн, как следует из уравнения

$$\varepsilon_l\,(\varepsilon_{tr} - z^{-2}) = (\Omega/\omega)^2 g_l g_{tr}, \tag{9}$$

вне узкой области волновых векторов с центром в нуле в первом приближении также не отличается от изотропного случая, изученного в [2—5]. При этом квазипоперечной волне в гидродинамическом пределе соответствует быстрая необыкновенная волна, а квазипродольной — медленная необыкновенная волна. Указанная область волновых векторов, например, для квазипоперечной волны определяется из условия

$$\varepsilon_l\,(k,\,\omega_{tr}) \leqslant (\Omega/\omega_{tr})\,(g_l g_{tr})\big|_{k,\omega_{tr}}, \tag{10}$$

где ω_{tr} — решение уравнения $\varepsilon_{tr}(k,\,\omega)=z^{-2}$. Результаты (1)—(10) справедливы для релятивистской плазмы в слабом магнитном поле с произвольным изотропным распределением электронов. Для плазмы с максвелловским распределением следует положить в формулах (3), (4) и (6), (7)

$$F_0 = (\alpha n/4\pi K_2(\alpha))\exp(-\alpha u_0),$$

$\alpha=mc^2/T$, T — температура плазмы. Тогда, разлагая функции ε и g в ряд по z^{-2} в нуле и ограничиваясь для ε нулевым и первым членами разложения, а для g только нулевым, получим

$$\varepsilon_l \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,(\lambda(\alpha) + z^{-2}\mu(\alpha)), \tag{11}$$

$$\varepsilon_{tr} \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(\lambda(\alpha) + \frac{1}{3} z^{-2}\mu(\alpha)\right), \tag{12}$$

$$g_l \simeq g_{tr} \simeq -\omega_p^2 \nu(\alpha)/\omega^2, \tag{13}$$

где ω_p — плазменная частота,

$$\lambda(\alpha) = \frac{\alpha^2}{3K_2(\alpha)} \int_0^\infty \frac{u^4 e^{-\alpha u_0}}{u_0^2} du, \quad \mu(\alpha) = \frac{\alpha^2}{5K_2(\alpha)} \int_0^\infty \frac{u^6 e^{-\alpha u_0}}{u_0^4} du,$$

$$\nu(\alpha) = \frac{\alpha^2}{3K_2(\alpha)} \int_0^\infty \frac{u^4 e^{-\alpha u_0}}{u_0^3} du. \tag{14}$$

Принимая во внимание формулы (11)—(13), из (9) в области (10) находим дисперсионное соотношение для необыкновенных волн в релятивистской плазме с максвелловским распределением:

$$[\omega^2 - \omega_p^2(\lambda + z_p^{-2}\mu/\lambda)]\left[\omega^2 - \omega_p^2\left(\lambda + \frac{1}{3} z_p^{-2}\mu/\lambda + z_p^{-2}\right)\right] =$$

$$= \Omega^2\omega_p^2\nu^2/\lambda, \quad (z_p = \omega_p/kc), \tag{15}$$

а также частоты отсечки

$$\omega_{1,2} = \omega_p\sqrt{\lambda} \pm \Omega\nu/2\lambda. \tag{16}$$

Полученные результаты можно значительно упростить в пределах низких и высоких температур. Для этого достаточно вычислить соответствующие асимптотики функций $\lambda(\alpha)$, $\mu(\alpha)$, $\nu(\alpha)$. В пределе низких температур будем иметь $\lambda \simeq 1$, $\mu \simeq 3/\alpha$, $\nu \simeq 1$. Формула (16) в этом случае сводится к известному результату гидродинамического приближения [1, с. 108]. Условие (10) имеет вид

$$k^2 \leqslant \Omega\omega_p/c^2.$$

В ультрарелятивистском пределе $\lambda \simeq \alpha/3$, $\mu = \alpha/5$, $\nu = \alpha^2/6$. Поэтому для частот отсечки имеем

$$\omega_{1,2} \simeq \omega_p\sqrt{\alpha/3} \pm \Omega\,\alpha/4.$$

Дисперсионное уравнение (15) согласно неравенству (10) в этом пределе справедливо в области

$$k^2 \leqslant \frac{5}{12\sqrt{3}} \frac{\Omega\omega_p}{c^2} \alpha^{5/2}.$$

Таким образом, спектр колебаний сверхсветовых волн в кинетической теории магнитоактивной плазмы в первом приближении по полю не содержит циклотронных мод. Эффект включения внешнего поля сводится только к расщеплению гидродинамического типа в области малых волновых векторов, размер которой пропорционален $\sqrt{\Omega}$ и в общем случае зависит от температуры. Дисперсия необыкновенных волн в этой области определяется уравнением (17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. [2] Силин В. П. ЖЭТФ, 1960, 38, с. 1577. [3] Цытович В. Н. ЖЭТФ, 1961, 40, с. 1775. [4] Mikhailovskii A. B. Plasma Phys., 1980, 22, p. 133. [5] Кузьменков Л. С., Ситнов М. И. Изв. вузов. Сер. Физика, 1982, 9, с. 57.

Поступила в редакцию
10.01.83