

УДК 539.12.01

РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ВЕРШИННОЙ ФУНКЦИИ В ЛЕСТНИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В. В. Белокуров, Н. И. Усюкина

(НИИЯФ)

Возросший в последнее время интерес к вычислению многопетлевых диаграмм квантовой теории поля [1, 2] связан прежде всего с успехами квантовой хромодинамики в низших порядках теории возмущений [3]. Возможно более точное определение величин основных параметров квантовой хромодинамики имеет важное значение как для совместного описания различных экспериментальных данных по сильным взаимодействиям [4], так и для принципиальных предсказаний теорий большого объединения, таких, например, как время жизни протона [5]. Поскольку определение величин параметров проводится путем сравнения экспериментальных данных при конечных энергиях с выражениями, полученными по теории возмущений, то для более точного определения требуется знание возможно большего числа членов ряда теории возмущений.

Многопетлевые вычисления встречаются и при вычислении критических индексов в моделях статистической физики методами квантовой теории поля [6, 7].

Методы вычисления получили развитие главным образом лишь для безмассовых многопетлевых диаграмм. Это связано как с относительной простотой этих диаграмм, так и с тем важным обстоятельством, что вычислимыми по теории возмущений в квантовой хромодинамике являются лишь эффекты, связанные с малыми расстояниями. И при вычислении этих эффектов, которые могут быть расфакторизованы с эффектами больших расстояний [8], массами можно пренебречь.

Методы манипулирования безмассовыми диаграммами, развитые в работах [7, 9], позволяющие в некоторых случаях получить соотношения для диаграмм произвольного порядка. Так, в настоящей работе получено рекуррентное соотношение для лестничных вершинных диаграмм в скалярной ϕ^3 -теории. (Ограничение скалярной теорией не носит принципиального характера, поскольку основная трудность многопетлевых вычислений заключается в вычислении примитивных скалярных интегралов, общих для различных квантовополевых моделей [1, 2].)

Прежде чем перейти к выводу указанного соотношения, сделаем ряд пояснений и приведем некоторые формулы, используемые в дальнейшем.

Чтобы не загромождать формулы, будем всюду опускать нормировочные множители, состоящие из степеней 2, π , i , которые без труда могут быть восстановлены в окончательных ответах.

Вычисления будем проводить в координатном представлении, где линиям диаграммы ($m=0$) соответствуют степенные множители типа $1/(x^2)^a$, которые графически будут изображаться как \underline{a} .

Произведение и свертка линий в координатном представлении имеют вид

$$\begin{array}{c} a_1 \\ \text{---} \circ \text{---} \\ a_2 \end{array} = \frac{a_1 + a_2}{2} ; \quad \begin{array}{c} a_1 \text{---} \\ \text{---} a_2 \end{array} = \frac{\Gamma(2-a_1)\Gamma(2-a_2)\Gamma(a_1+a_2-2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(4-a_1-a_2)} \frac{a_1+a_2-2}{2} \quad (1)$$

При определенных условиях на параметры трехконцевая вершина может быть сведена к треугольнику [7, 9]:

$$\begin{array}{c} 2+\alpha_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1+\alpha_3 \quad 1+\alpha_2 \\ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0) \end{array} = \frac{\Gamma(-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)\Gamma(1-\alpha_3)}{\Gamma(2+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(1+\alpha_3)} \cdot \begin{array}{c} 1-\alpha_2 \quad 1-\alpha_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ -\alpha_1 \end{array}, \quad (2)$$

$$\begin{array}{c} 1+\alpha_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1+\alpha_3 \quad 1+\alpha_2 \\ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0) \end{array} \Rightarrow \frac{1+\alpha_2}{\alpha_1} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1+\alpha_3 \quad 2+\alpha_2 \end{array} - \frac{1+\alpha_3}{\alpha_1} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2+\alpha_3 \quad 1+\alpha_2 \end{array} + \quad (3)$$

$$+ \frac{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(-\alpha_2)\Gamma(-\alpha_3)}{\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(1+\alpha_3)} \cdot \begin{array}{c} -\alpha_2 \quad -\alpha_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1-\alpha_1 \end{array}$$

Рассмотрим теперь n -петлевую лестничную вершинную диаграмму. Введем аналитическую регуляризацию указанным на рис. 1 способом, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Эта диаграмма представляет собой некоторую функцию параметров $a - F_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Для вывода формулы, связывающей $F_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с $F_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, рассмотрим подграф, отмеченный на рис. 1. С помощью соотношения (3) представим этот граф в виде линейной комбинации диаграмм a, b, v (рис. 2) соответственно

с коэффициентами $\mathcal{F}/\alpha_1\alpha_3, -(1+\alpha_3)/\alpha_2, -(1+\alpha_1)/\alpha_2$, где $\mathcal{F} \equiv \prod_{i=1}^3 \times \Gamma(1-\alpha_i)/\Gamma(1+\alpha_i)$. С помощью тождества (2) диаграмма b рис. 2 преобразуется к диаграмме a , в которой α_1 заменено на α_2 , а α_2 на α_1 , при этом возникает дополнительный множитель $-\mathcal{F}/\alpha_3(1+\alpha_3)$, что с учетом фактора, полученного на предыдущем этапе, приводит к множителю $\mathcal{F}/\alpha_2\alpha_3$.

Используя теперь формулы (1)–(3), нетрудно преобразовать диаграммы a, v , рис. 2, как это показано на рис. 3, 4. При этом исходная диаграмма рис. 1 сводится к линейной комбинации аналогичных диаграмм, но содержащих на одну петлю меньше.

Чтобы не загромождать рисунки, на них не указаны явно множители, которые содержатся в формулах (1)–(3), используемых при редукции. Учитывая теперь эти множители, приходим к следующему соотношению:

$$F_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \left\{ \frac{1+\alpha_2}{\alpha_1} \alpha_1 \mathcal{F} F_{n-1}(\alpha_1, 0, -\alpha_1) + \frac{1+\alpha_3}{\alpha_2} \alpha_2 \mathcal{F} F_{n-1}(0, \alpha_2, -\alpha_2) + \frac{1}{\alpha_3} \alpha_3 F_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \right\}, \quad (n \geq 3). \quad (4)$$

Для возможности сведения n -петлевой вершинной функции к однопетлевой требуется еще соотношение, выражающее двухпетлевую вершинную функцию через однопетлевую. Это соотношение может быть выведено аналогичным способом; оно изображено на рис. 5.

Отметим важное значение полученных рекуррентных соотношений для вывода различных представлений вершинных функций. Так, например, для однопетлевой вершинной функции существует представление в виде двукратного интеграла Меллина [10]. С помощью соотно-

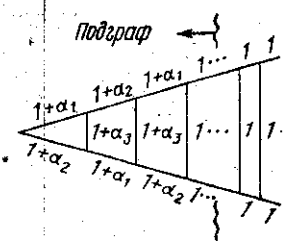


Рис. 1

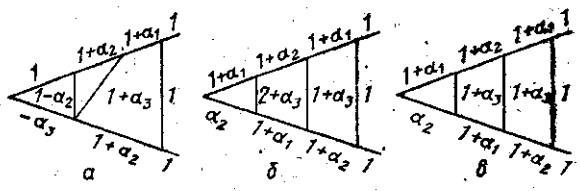


Рис. 2

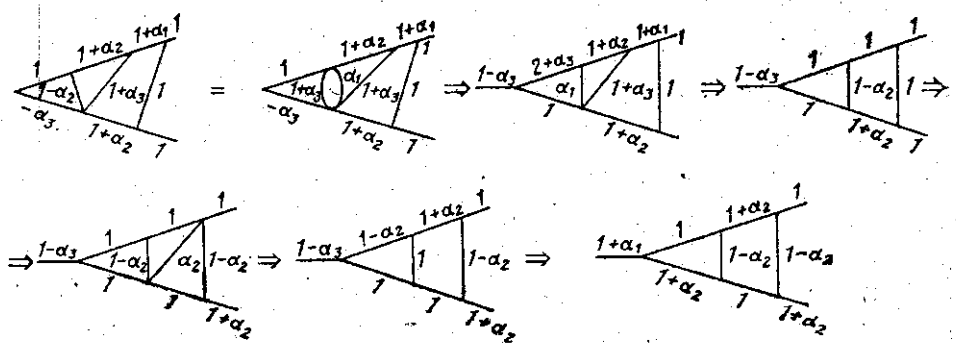


Рис. 3

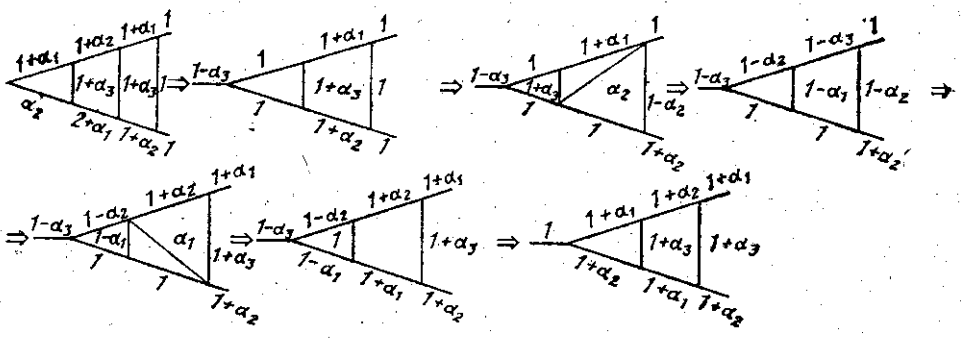


Рис. 4

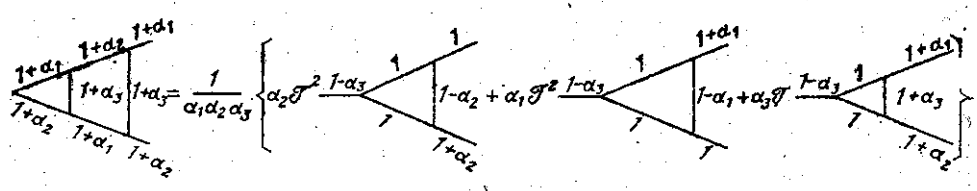


Рис. 5

шения (4) аналогичное представление может быть получено и для l -петлевой вершинной функции. Это представление также будет иметь вид двукратного интеграла Меллина, что позволяет сразу определить поведение вершинной функции в любой кинематической области.

Интересное применение находят эти рекуррентные соотношения при вычислении диаграмм пропагаторного типа. Такие диаграммы играют особую роль во всех ренормгрупповых вычислениях. Это связано с тем замечательным обстоятельством, что проблема вычисления контрчлена от произвольной l -петлевой диаграммы с произвольными массами и произвольным числом внешних импульсов в рамках MS-схемы может быть сведена к проблеме вычисления до $O(\epsilon^0)$ некоторого $(l-1)$ -петлевого безмассового интеграла, зависящего только от одного внешнего импульса [11, 1].

Для двухпетлевой пропагаторной диаграммы с помощью формул (2)–(3) можно получить следующее выражение:

$$\Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{1}{(\rho^2)^{1+\alpha_3}} \frac{\Gamma(1+\alpha_3)}{\Gamma(1-\alpha_3)} \mathcal{J} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{2n+2} C_{2n+3}^k \alpha_1^{k-1} \alpha_2^{2n+2-k} / (\alpha_1 + \alpha_2), \quad (5)$$

где $a_n \equiv 2\psi^{(2n+2)}(1)/(2n+2)! = -2\zeta(2n+3)$.

N -петлевая пропагаторная диаграмма, полученная замыканием внешних линий у диаграммы рис. 1, может теперь быть вычислена [12] с помощью соотношений (4) и рис. 5, что приводит к выражению

$$\Phi_N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{1}{(\rho^2)^{N-1+\alpha_3}} \frac{\Gamma(1+\alpha_3)}{\Gamma(1-\alpha_3)} \mathcal{J}^2 \sum_{n=N-2}^{\infty} a_n \times \\ \times \sum_{k=N-1}^{2n+3-(N-1)} C_{2n+3}^k \alpha_1^{k-N+1} \alpha_2^{2n+3-k-(N-1)} / (\alpha_1 + \alpha_2). \quad (6)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ вклад в правую часть формулы (6) дает, как легко видеть, лишь слагаемое, соответствующее $n = N-2$, и

$$\Phi_N = -\frac{1}{(\rho^2)^{N-1}} a_{N-2} \lim_{\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0} \left(C_{2N-1}^{N-1} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \right. \\ \left. + C_{2N-1}^N \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right).$$

Таким образом,

$$\Phi_N \equiv \Phi_N(0, 0, 0) = \frac{1}{(\rho^2)^{N-1}} 2\zeta(2N-1) C_{2N-1}^N. \quad (7)$$

Вывод рекуррентного соотношения (4) оказался возможным потому, что рассматривались лишь лестничные диаграммы, вид которых одинаков в каждом порядке теории возмущений. Лестничные диаграммы представляют тем самым выделенный класс, который, разумеется, не исчерпывает всех допустимых диаграмм. Однако получение даже ограниченной информации в произвольном порядке теории возмущений чрезвычайно важно, например, при исследовании аналитических свойств, для различного рода оценок и т. д. Кроме того, в ряде физических интересных моделей лестничные диаграммы могут для некоторых

кинематических областей давать основной вклад. Характерным примером может служить квантовая хромодинамика в калибровках аксиального типа (см., например, [13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V. Nucl. Phys., B174, 1980, p. 345. [2] Chetyrkin K. G., Tkachov F. V. Nucl. Phys., 1981, B192, p. 159. [3] Reya E. Phys. Reports, 1981, 69, N 3, p. 195. [4] Buras A. J. NORDITTA preprint 81/43, 1981. [5] Mohapatra R. N. Preprint CCNY—HER—82/2, N. Y., 1982. [6] Казаков Д. И., Тарасов О. В., Владимиров А. А. Вычисление критических индексов методами квантовой теории поля. Препринт E2-124961, Дубна, 1979. [7] Васильев А. Н., Письмак Ю. М., Хонконен Ю. Р. ТМФ, 1981, 47, № 3, с. 291. [8] Amati D., Petronzio R., Veneziano G. Nucl. Phys., 1978, B146, p. 29. [9] Усюкина Н. И. ТМФ, 1983, 54, № 1, с. 124. [10] Усюкина Н. И. ТМФ, 1975, 22, № 3, с. 300. [11] Владимиров А. А. ТМФ, 1980, 43, с. 210. [12] VeIokurov V. V., Ussyukina N. I. J. of Phys. A., 1983, 16, p. 2811. [13] Pritchard D. J., Stirling W. J. Nucl. Phys., 1980, B165, p. 237.

Поступила в редакцию
20.12.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 6.

УДК 539.12.01

«ТЕОРЕМА ПОГАШЕНИЯ». КВАНТОВЫЙ ПОДХОД

В. Бужек (Чехословакия), В. И. Григорьев, Я. Хронек (Чехословакия)

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Хорошо известная «Теорема погашения» Эвальда — Озеена, посвященная выяснению — на уровне микроскопического описания — того, как формируется в веществе электромагнитная волна, распространяющаяся со скоростью c/n , была сформулирована сначала в рамках неквантового подхода [1, 2]. В настоящей работе предлагается попытка «перевода на квантовый язык» этой теоремы.

Рассмотрим идеальную бесконечно протяженную кубическую решетку, в узлах которой неподвижно закреплены двухуровневые центры. Гамильтониан взаимодействия между электромагнитным излучением и таким кристаллом запишем в дипольном приближении:

$$H_{\text{вз}} = - \sum_f (\hat{d}_f \hat{E}_f),$$

где \hat{d}_f — оператор дипольного электрического момента f -го центра, имеющего координаты $\{a_{f1}, a_{f2}, a_{f3}\}$, E_f — оператор напряженности электрического поля в той точке, где помещается этот узел. Будем пользоваться калибровкой, при которой

$$\hat{E} = - \partial \hat{A} / \partial t,$$

и

$$\hat{A}_f = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k \times \\ \times \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda) \{ a_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{k}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}_f} + a_{\lambda}^{(-)}(\mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}_f} \}$$