ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 6

УДК 634.222

О РАСЧЕТЕ НЕОДНОРОДНОЙ СОГЛАСУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ОДНОМОДОВЫХ ВОЛНОВОДОВ

М. Н. Житникова, К. В. Чернышев

(кафедра акустики)

Вопрос о согласовании двух полубесконечных стержневых волноводов рассматривался и ранее (см., например, [1]). Такие волноводы — удобная модель для решения широкого круга задач согласования в акустике, оптике и электродинамике. Использованный в настоящей статье метод построения согласующей системы отличается от метода, примененного в [1], однако мы будем заимствовать из [1] некоторые математические приемы.

Рассмотрим задачу одночастотного согласования на минимум коэффициента отражения двух твердых стержневых волноводов различного сечения. Обозначим координаты начала и конца соединительного согласующего стержня 0 и l соответственно, площади его торцевых сечений $S(0)$ при $x=0$ и $S(l)$ при $x=l$. Для полубесконечных стержней: ρ_1, ρ_2 — их плотности, c_1, c_2 — скорости звука в них, площадь сечений для $x<0$ — S_1, а для $x>l$ — S_2. Падающая волна движется от значений $x=-\infty$ в направлении возрастания x и при $x=0$ частично отражается, а частично переходит в область $x>0$. Исключить отражение можно путем соответствующего подбора соединительного стержня.

Согласование может быть обеспечено с помощью стержня постоянного сечения (цилиндр). При гармоническом процессе с круговой частотой ω_0 уравнение для смещения ξ в таком стержне имеет вид

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + k_0^2\xi = 0, \tag{1}$$

где $k_0=\omega_0/c$ — волновое число; в дальнейшем частоту будем характеризовать соответствующим значением k.

Фундаментальная система решений этого уравнения: $\varphi(x)=\cos k_0x$, $\overline{\psi}(x)=(\sin k_0x)/k_0$ удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\varphi(0)=1, \quad \overline{\psi}(0)=0,\\ &\overline{\varphi}'(0)=0, \quad \overline{\psi}'(0)=1. \end{aligned} \tag{2}$$

Используя выражение для коэффициента отражения по мощности от сечения $x=0$ через фундаментальную систему решений (см. [1]):

$$\begin{aligned} R = &\left[\left(\frac{\rho_1c_1}{\rho c}\overline{\psi}'(l) - \frac{\rho_2c_2}{\rho c}\frac{S(0)\,S_2}{S_1S(l)}\overline{\varphi}(l)\right)^2 + \right.\\ &\left.+\left(\frac{1}{k}\frac{S(0)}{S_1}\overline{\varphi}'(l) + k\frac{\rho_1c_1}{\rho c}\frac{\rho_2c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S(l)}\overline{\psi}(l)\right)^2\right]\times\\ &\times\left[\left(\frac{\rho_1c_1}{\rho c}\overline{\psi}'(l) + \frac{\rho_2c_2}{\rho c}\frac{S(0)\,S_2}{S_1S(l)}\overline{\varphi}(l)\right)^2 + \right.\\ &\left.+\left(\frac{1}{k}\frac{S(0)}{S_1}\overline{\varphi}'(l) - k\frac{\rho_1c_1}{\rho c}\frac{\rho_2c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S(l)}\overline{\psi}(l)\right)^2\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

найдем, что для согласования стержнем постоянного сечения, т. е. для $R=0$, стержень должен иметь длину $l_0=\lambda_0(2n+1)/4$ (λ_0 — длина волны) и площадь поперечного сечения $S_0=(\rho_1c_1\rho_2c_2S_1S_2/\rho^2c^2)^{1/2}$.

При малом отклонении частоты волнового числа от k_0 и длины от l_0 можно считать, что форма согласующего стержня мало отличается от цилиндрической.

Уравнение распространения волн в стержне переменного сечения имеет вид

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}+\tilde{u}_\Delta(x)\frac{d\xi}{dx}+k^2\xi=0, \tag{4}$$

где $\tilde{u}_\Delta(x)=\frac{d}{dx}(\ln S(x))$ — управляющая функция, $S(x)$ — площадь сечения согласующего стержня.

Введем обозначения: $t=kx$, $t_0=k_0l_0$, $t_\Delta=kl=k_0l_0+\Delta$, где $\Delta=k_0\Delta_x+l_0\Delta_k$ (Δ_x и Δ_k — изменения значений длины стержня и частоты). Если в уравнении (4) перейти к переменной t, управляющая функция $u_\Delta(t)$ будет удовлетворять соотношению $ku_\Delta(t)=\tilde{u}_\Delta(x)$. При достаточно малом Δ $u_\Delta(t)=u_0(t)+\Delta u_1(t)$, где $u_0(t)$ — управляющая функция при $\Delta=0$, $u_1(t)$ — некоторая непрерывная функция. В нашем случае $u_0(t)\equiv 0$, так как исходный стержень имеет цилиндрическую форму.

Перепишем (4) в следующем виде:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\xi=-\Delta\cdot u_1(t)\frac{d\xi}{dt}. \tag{5}$$

Введем $\varphi_\Delta(t)$ и $\psi_\Delta(t)$ — фундаментальную систему решений для уравнения (4). Разложим функции φ_Δ и ψ_Δ в ряд по малому параметру Δ:

$$\begin{aligned}\varphi_\Delta(t)&=\varphi(t)+\Delta\cdot\varphi_1(t)+\Delta^2\cdot\varphi_2(t)+\ldots,\\ \psi_\Delta(t)&=\psi(t)+\Delta\cdot\psi_1(t)+\Delta^2\cdot\psi_2(t)+\ldots,\end{aligned} \tag{6}$$

где $\varphi(t)=\cos t$, $\psi(t)=\sin t$ — фундаментальная система решений уравнения для цилиндрического стержня, удовлетворяющая граничным условиям (2). В выражениях (6) сохраним члены 1-го порядка малости. Тогда для функций $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ получаются однородные граничные условия: $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_1'(0)=0$, $\psi_1(0)=0$, $\psi_1'(0)=0$. Укороченные выражения (6) подставим в (5), получим:

$$\varphi_1''(t)+\varphi_1(t)=-u_1(t)\varphi'(t),$$
$$\psi_1''(t)+\psi_1(t)=-u_1(t)\psi'(t).$$

Решения этих неоднородных уравнений, удовлетворяющих указанным граничным условиям, можно записать через решения φ и ψ однородного уравнения (1) следующим образом [2]:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t)&=\psi(t)\int_0^t\frac{-u_1(\tau)\,\varphi(\tau)\,\varphi'(\tau)}{W}d\tau-\varphi(t)\int_0^t\frac{-u_1(\tau)\,\varphi'(\tau)\,\psi(\tau)}{W}d\tau,\\ \psi_1(t)&=\psi(t)\int_0^t\frac{-u_1(\tau)\,\varphi(\tau)\,\psi'(\tau)}{W}d\tau-\varphi(t)\int_0^t\frac{-u_1(\tau)\,\psi'(\tau)\,\psi(\tau)}{W}d\tau,\end{aligned} \tag{7}$$

где $W(t)=\varphi(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi(t)$ — вронскиан уравнения (1). Так как $\varphi(t)=\cos t$, $\psi(t)=\sin t$, то $W(t)=1$, а выражения (7) преобразуются следующим образом:

$$\varphi_1(t) = \sin t \int_0^t u_1(\tau)\cos\tau\cdot\sin\tau\cdot d\tau - \cos t \int_0^t u_1(\tau)\sin^2\tau\cdot d\tau,$$

$$\psi_1(t) = -\sin t \int_0^t u_1(\tau)\cos^2\tau\cdot d\tau + \cos t \int_0^t u_1'(\tau)\sin\tau\cdot\cos\tau\cdot d\tau.$$

Найдем, какова должна быть управляющая функция $u_\Delta(t)$, чтобы соответствующий ей согласующий стержень длины $l=l_0+\Delta_x$ давал нулевой коэффициент отражения на частоте, соответствующей значению $k=k_0+\Delta_k$. Для этого приравняем нулю числитель в выражении (3). Очевидно, это приводит к равенству нулю выражений

$$\frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\psi_\Delta'(t_\Delta) - \frac{S(0)S_2}{S_1 S(t_\Delta)}\varphi_\Delta(t_\Delta) = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{S(0)}{S_1}\varphi_\Delta'(t_\Delta) + \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S(t_\Delta)}\psi_\Delta(t_\Delta) = 0,$$

где

$$S(t) = S(0)\exp\left(\Delta\cdot\int_0^t u_1(\tau)\,d\tau\right).$$

В выражении $1/S(t) = \left(1/S(0)\right)\exp\left(-\Delta\cdot\int_0^t u_1(\tau)\,d\tau\right)$ разложим экспоненту в ряд по Δ и сохраним члены с Δ^0 и Δ^1:

$$\frac{1}{S(t)} = \frac{1}{S(0)}\left(1 - \Delta\int_0^t u_1(\tau)\,d\tau\right). \qquad (9)$$

Подставим (9) в (8) и с учетом $t_\Delta = t_0+\Delta$, $\cos t_0 = 0$, $\sin t_0 = 1$, с точностью до Δ^1 найдем:

$$\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1} + \frac{\Delta}{2}\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - 3\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1}\right)\int_0^{t_0+\Delta} u_1(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \frac{\Delta}{2}\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1}\right)\int_0^{t_0+\Delta} u_1(\tau)\cos 2\tau d\tau -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1}\right)\int_0^{t_0+\Delta} u_1(\tau)\sin 2\tau\cdot d\tau +$$

$$+ \frac{\Delta}{2}\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1}\int_0^{t_0+\Delta} u_1(\tau)\cdot d\tau\cdot\int_0^{t_0+\Delta} u_1(\tau)\sin 2\tau\cdot d\tau = 0, \qquad (10)$$

$$-\frac{S(0)}{S_1} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S(0)} + \frac{\Delta}{2}\left(\frac{S(0)}{S_1} - 3\frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S(0)}\right)\times$$

$$\times\int_0^{t_0+\Delta} u_1(\tau)\,d\tau - \frac{\Delta}{2}\left(\frac{S(0)}{S_1} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S(0)}\right)\int_0^{t_0+\Delta} u_1(\tau)\cos 2\tau\cdot d\tau = 0.$$

Любую непрерывную функцию можно сколь угодно точно аппроксимировать полиномом, поэтому представим $u_1(t)$ в виде $u_1(t) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i t^i$ и рассмотрим частный случай, когда $u_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$. Коэффициенты α_i необходимо подобрать так, чтобы выполнялись условия (10) для функции u_1.

Условия (10) должны выполняться при любых значениях Δ, поэтому приравняем нулю члены при Δ^0 и Δ^1. В результате получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными $S(0)$, α_0, α_1, α_2:

$$
\begin{gathered}
-\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1} - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1}\right)(2\alpha_0 + \alpha_1 t_0 + \alpha_2 (t_0 - 1)) = 0, \\
-\frac{S(0)}{S_1} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\cdot\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\cdot\frac{S_2}{S(0)} = 0, \\
-\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1}\right)\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} t_0\right) + \\
+\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - 3\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1}\right)\left(\alpha_0 t_0 + \frac{\alpha_1}{2} t_0^2 + \frac{\alpha_2}{3} t_0^2\right) + \\
+\frac{1}{2}\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\left(\alpha_0 t_0 + \frac{\alpha_1}{2} t_0^2 + \frac{\alpha_2}{3} t_0^3\right)(2\alpha_0 + \alpha_1 t_0 + \alpha_2 (t_0^2 - 1)) = 0, \qquad (11) \\
\left(\frac{S(0)}{S_1} - 3\frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S(0)}\right)\left(\alpha_0 t_0 + \frac{\alpha_1}{2} t_0^2 + \frac{\alpha_2}{3} t_0^3\right) + \\
+\left(\frac{S(0)}{S_1} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S(0)}\right)\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} t_0\right) = 0.
\end{gathered}
$$

Из второго уравнения системы (11) получим выражение для площади торцевого сечения $S(0)$ согласующего стержня: $S^2(0) = \rho_1 c_1 \rho_2 c_2 S_1 S_2 / \rho^2 c^2$. С учетом этого выражения система (11) преобразуется к виду

$$
\begin{gathered}
\alpha_1 + \alpha_2 t_0 = 0, \\
2\alpha_0 + \alpha_1 t_0 + \alpha_2 (t_0^2 - 1) = 4\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1} - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\right)\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\right)^{-1}, \qquad (12) \\
\alpha_0 t_0 + \frac{\alpha_1}{2} t_0^2 + \frac{\alpha_2}{3} t_0^3 = 0.
\end{gathered}
$$

Вычислим определитель системы:

$$
\begin{vmatrix} 0 & 1 & t_0 \\ 2 & t_0 & t_0^2 - 1 \\ t_0 & t_0^2/2 & t_0^3/3 \end{vmatrix} = t_0\left(\frac{1}{3} t_0^2 - 1\right).
$$

Он отличен от нуля, так как $t_0 = \pi/2$, и система (11) имеет единственное решение:

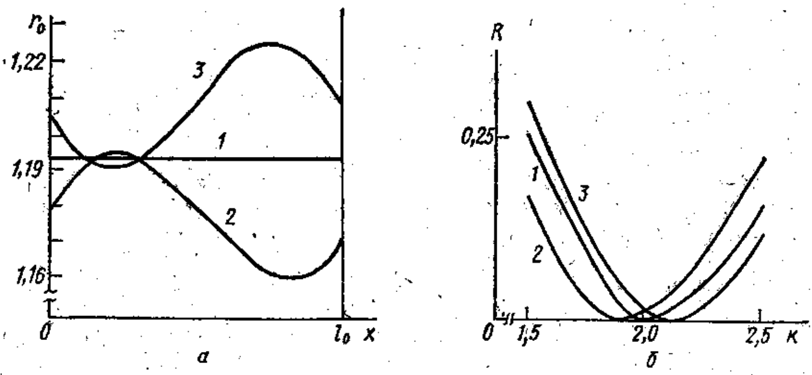
$$
\begin{gathered}
\alpha_0 = \frac{2t_0^2}{t_0^2 - 3}\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\cdot\frac{S_2}{S_1} - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\right)\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\right)^{-1}, \\
\alpha_1 = -\frac{12 t_0}{t_0^2 - 3}\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1} - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\right)\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\cdot\frac{S_2}{S_1} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\right)^{-1}, \\
\alpha_2 = \frac{12}{t_0^2 - 3}\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1} - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\right)\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\right)^{-1}.
\end{gathered}
$$

Таким образом, найден вид управляющей функции: $u_\Delta(t) = \Delta \cdot u_1(t) = \Delta \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)$, которая обеспечивает нулевой коэффициент отражения на частоте, соответствующей $k = k_0 + \Delta_k$ при длине согласующего стержня $l = l_0 + \Delta_x$. Зависимость площади поперечного сечения от координаты x имеет вид

$$S(x) = S(0)\exp\left(\Delta \cdot \int_0^{kx} u_1(z)\,dz\right) = S(0)\exp\left[4k\Delta\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1} - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho c}\frac{S_2}{S_1} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\right)^{-1}\left(\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{\pi^2-12}x - \frac{3\pi}{\pi^2-12}kx^2 + \frac{4}{\pi^2-12}k^2x^3\right)\right].$$

Заметим, что с увеличением Δ вид функции $u_1(t)$ усложняется (нарастает отличие формы согласующего стержня от исходной). На определенном этапе возникает необходимость либо представлять $u_1(t)$ полиномом более высокой степени, чем вторая, либо принять получен-



Формы образующей согласующего стержня (*а*) и спектральные характеристики согласующей системы (*б*): *1* — цилиндр, $l_0 = 0{,}785\lambda_0/\pi$, $k = 2{,}0$ (*1*); 1,9 (*2*) и 2,1 (*3*), $\Delta_k = -0{,}1$ (*2*); 0,1 (*3*) (выбор единицы длины произволен)

ную форму стержня за исходную и повторить процедуру. Если первый путь связан с некоторым усложнением схемы решения, то при повторении рассмотренной процедуры следующий шаг отличается от первого только тем, что $u_0(t)$ будет уже отлично от нуля.

Рассмотрим конкретный пример согласования двух цилиндрических стержней с отношением площадей $S_1 : S_2 = 1 : 10$. Эти стержни, как и согласующий стержень, изготовлены из одного и того же материала, т. е. $\rho_1 c_1/\rho c = 1$, $\rho_2 c_2/\rho c = 1$. Поскольку выбор единицы длины в данном случае произволен, все величины, имеющие смысл длины, площади и волнового числа, будем приводить без указания размерности. Пусть $k_0 = 2$, тогда $l_0 = \pi/4$.

Рассмотрим два случая: зададим $\Delta_k = 0{,}1$ и $\Delta_k = -0{,}1$, а Δ_x в обоих случаях положим равным нулю. Таким образом, получим два различных значения Δ: $0{,}025\pi$ и $-0{,}025\pi$. Цилиндрический стержень, согласующий волноводы на частоте, соответствующей значению $k_0 = 2$, и имеющий длину $l_0 = \pi/4$, имеет площадь поперечного сечения $S_0 = (S_1 S_2)^{1/2} = 20^{1/2}$. А функции площади стержней, согласующих исходные на частотах, соответствующих $k = 2{,}1$ и $k = 1{,}9$ $(x = l_0)$, следующие:

$$S(x) = (21)^{1/2}\exp(-0{,}39x + 1{,}59x^2 - 1{,}42x^3),$$

$$S(x) = (19)^{1/2}\exp(0{,}36x - 1{,}31x^2 + 1{,}05x^3).$$

На рисунке, *а* приведены формы согласующих стержней. Спектральные характеристики цилиндрической согласующей системы и вновь полученных приведены на рисунке, *б*. Из графиков видно, что стержень, согласующий волноводы на частоте, соответствующей значению $k=2{,}1$, имеет несколько более широкую спектральную характеристику, чем четвертьволновый цилиндрический стержень. А второй полученный стержень ($k=1{,}9$), обладая меньшей относительной длиной (отношение l_0 к длине волны согласования), имеет несколько более узкую спектральную характеристику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Именитова Е. В., Чернышев К. В. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ., Астрон., 1981, **22**, № 4, с. 37. [2] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию
30.12.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 6

УДК 541.144.7

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ МИГРАЦИИ ЭНЕРГИИ ПРИ ФОТОСИНТЕЗЕ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ СВЕТОСОБИРАЮЩЕЙ МАТРИЦЫ

Е. М. Мелихова, А. К. Кукушкин

(кафедра биофизики)

Аппарат фотосинтеза высших растений и других фотосинтезирующих организмов содержит агрегаты пигментных молекул, поглощающих свет и доставляющих запасенную энергию к фотохимическим реакционным центрам. В литературе обсуждаются два типа механизмов, которые могут объяснить высокую скорость переноса энергии и его направленность к реакционным центрам. Экситонный механизм описывает перенос энергии в системе идентичных молекул (типа молекулярных кристаллов), скорость его сопоставима со скоростью колебательной релаксации (10^{13} $с^{-1}$). Миграция носит характер ненаправленных блужданий. По механизму Фёрстера — Галанина происходит более медленный перенос энергии. Его скорость сопоставима со скоростями излучательной и безызлучательной дезактивации и определяется интегралом перекрывания спектра излучения донора и спектра поглощения акцептора, расстоянием между молекулами и их взаимной ориентацией. Когда донор и акцептор отличаются по спектральным свойствам, перенос принимает направленный характер (в сторону молекулы с более низким возбужденным уровнем). Расчет миграции энергии для различных моделей организации светособирающей матрицы и сравнение с экспериментальными данными по флуоресценции может помочь в выяснении того, какой механизм переноса энергии реализуется в действительности при фотосинтезе.

В 1969 г. Монтролл рассмотрел задачу переноса энергии по светособирающей пигментной матрице в рамках теории случайных блужданий возбуждения по решетке [1]. При этом рассматривалась решетка из M точек с ловушкой в начале координат и с периодическими граничными условиями. Введение периодических граничных условий озна-