УДК 533.9.01

# СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

**П. Б. Дмитриев**

*(кафедра математики)*

При исследовании движений достаточно разреженной плазмы в приближении самосогласованного поля применяется система уравнений Власова, которая в одномерном случае при компенсации стационарным электрическим полем неподвижного ионного фона имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}=0,$$

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f dv, \tag{1}$$

$$f(x, v, 0)=f_0(x, v).$$

Здесь $x$, $v$ — точки на прямой $R_1$, $f(x, v, t)$ — функция распределения электронов, $\varphi(x, t)$ — потенциал самосогласованного поля, $\lambda=4\pi em$, где $e$ — заряд электрона, $m$ — масса электрона.

В работе [1] доказано, что система (1) имеет единственное классическое решение на интервале $(0, \infty)$. В настоящей работе система (1) исследуется для случая, когда $x\in[a, b]$, и на концах отрезка ставятся условие поглощения для функции распределения $f(x, v, t)$ и однородные граничные условия 1-го рода для потенциала $\varphi(x, t)$:

$$f(a, v, t)\,|_{v>0}=f(b, v, t)\,|_{v<0}=0, \tag{2}$$

$$\varphi(a, t)=\varphi(b, t)=0.$$

Специфика условий (2) приводит к тому, что у задачи (1)—(2) не существует классического решения.

Определение. Совокупность двух функций $\{\varphi(x, t), f(x, v, t)\}$ назовем обобщенным решением системы (1)—(2) на интервале $(0, T)$, если

1) функция $\varphi(x, t)$ два раза дифференцируема по $x$ и непрерывна по $t$ и

$$\|\varphi\|=\sup_{\substack{x\in[a,b]\\ t\in[0,T]}}|\varphi(x,t)|+\sup_{\substack{x\in[a,b]\\ t\in[0,T]}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|+\sup_{\substack{x\in[a,b]\\ t\in[0,T]}}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|<\infty;$$

2) функция $f(x, v, t)$ интегрируема по $dxdv$ при всех $t\in[0, T]$ и по $dv$ при всех $x\in[a, b]$ и $t\in[0, T]$;

3) функция $f(x, v, t)$ постоянна на характеристиках первого уравнения системы (1)—(2), функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет тождеству

$$\varphi(x, t)=-\lambda\int\limits_a^b G(x, \xi)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, v, t)\, dv d\xi,$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина оператора $\partial^2/\partial x^2$ с однородными граничными условиями 1-го рода.

Теорема. Пусть функция $f_0(x, v)$ дифференцируема по $x$ и $v$, и существует $L(v)$ — ограниченная, монотонно убывающая функция модуля скорости, такая, что

$$f_0(x, v) \leqslant L(v), \left|\frac{\partial f_0}{\partial x}\right| \leqslant L(v), \left|\frac{\partial f_0}{\partial v}\right| \leqslant L(v), \int_{-\infty}^{+\infty} L(v) \cdot |v| \, dv < \infty,$$

тогда на некотором интервале $(0, T)$ существует единственное обобщенное решение системы (1)—(2).

Вообще говоря, число $T$ зависит от начальной функции распределения $f_0$.

*Доказательство.* Пусть $T$ — некоторое положительное число; $W_T$ — пространство дважды дифференцируемых по $x$ и непрерывных по $t$ функций $\{\varphi(x, t)\}$ с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ t \in [0,T]}} |\varphi(x, t)| + \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ t \in [0,T]}} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| + \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ t \in [0,T]}} \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right| < \infty$$

и таких, что $\varphi(a, t) = \varphi(b, t) = 0$; $\rho_T$ — метрика в пространстве $W_T$, определяемая выражением

$$\rho_T(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ t \in [0,T]}} |\varphi_1(x_1 t) - \varphi_2(x, t)| + \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ t \in [0,T]}} \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|;$$

$W_T{}^*$ — пополнение пространства $W_{T_*}$ в метрике $\rho_T$; $\mathring{W}_T^*$ — подмножество $W_T{}^*$ следующего вида: если функция $\varphi \in \mathring{W}_T{}^*$, то существует последовательность $\{\varphi_n\}$ функций из пространства $W_T$, равномерно по $n$ ограниченная по норме и сходящаяся в метрике $\rho_T$ к функции $\varphi$.

Положим, что любая функция $\varphi(x, t)$ из пространства $W_T$ вне отрезка $[a, b]$ равна нулю, тогда для нее определено отображение $S^{\varphi}{}_{-t}$, которое точке $(x, v) \in R_2$ ставит в соответствие точку $(X_\varphi(x, v, t)$, $V_\varphi(x, v, t))$, являющуюся значением решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_\varphi}{d\tau} = -V_\varphi, \quad X_\varphi(x, v, 0) = x;$$
$$\frac{dV_\varphi}{d\tau} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_\varphi, t - \tau), \quad V_\varphi(x, v, 0) = v \tag{3}$$

в точке $\tau = t$. Если функция $\varphi(x, t) \in W_T$, то непрерывно дифференцируемое решение последних двух уравнений существует и единственно.

Определим множество $D(\varphi, t) \subset R_2$ следующим образом:

$$D(\varphi, t) = \{(a, b) \otimes R_1\} \cap \hat{S}_t{}^{\varphi}\{(a, b) \otimes R_1\}.$$

Множество $D(\varphi, t)$ открыто и измеримо в $R_2$, так как отображение $S^{\varphi}{}_{-t}$ является открытым и измеримые в $R_2$ множества переводит в измеримые.

При фиксированной функции $\varphi(x, t) \in W_T$ функция $f(x, v, t)$ имеет вид

$$f(x, v, t) = \begin{cases} f_0(X_\varphi, V_\varphi), & \text{если } (X_\varphi, V_\varphi) \in D(\varphi, t), \\ 0, & \text{если } (X_\varphi, V_\varphi) \overline{\in} D(\varphi, t). \end{cases}$$

Поэтому пара функций $\{\varphi, f\}$ в том и только в том случае является обобщенным решением системы (1)—(2), если функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению $\varphi=K(\varphi)$, где оператор $K$ определяется выражением

$$K(\varphi)=-\lambda\int\limits_a^b G(x,\xi)\int\limits_{\overline{P(\varphi,\xi,t)}} f_0(X_\varphi(\xi,v,t),\ V_\varphi(\xi,v,t))\,dv d\xi.$$

Здесь $P(\varphi,\xi,t)=\bigcup\limits_{(\xi,v)\in D(\varphi,t)}$ — открытое, измеримое на прямой множество, и через $\overline{P(\varphi,\xi,t)}$ обозначено замыкание множества $P(\varphi,\ \xi,\ t)$ в $R_1$.

Таким образом, оператор $K$ определен на функциях из пространства $W_T$.

Установим некоторые свойства отображения $S^\varphi_{-t}$.

Лемма 1. Пусть $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ — функции из пространства $W_T$, тогда справедливы оценки:

1. $|X_{\varphi_1}-X_{\varphi_2}|\leqslant t^2\rho_T(\varphi_1,\varphi_2)$,
   $|V_{\varphi_1}-V_{\varphi_2}|\leqslant t\rho_T(\varphi_1,\varphi_2)$;
2. $|v-V_\varphi|\leqslant\|\varphi\|t$,
   $V_\varphi\in(-C_4/t,\ C_4/t)$, если $X_\varphi\in(a,b)$, где $C_4<\infty$;
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}L(V_\varphi)\,dv\leqslant\int\limits_{-}^{+\infty}L(v)\,dv+2L(0)\|\varphi\|t.$

Первые два утверждения леммы сразу следуют из интегрального представления системы (3). Доказательство третьего утверждения основано на свойствах монотонного убывания и ограниченности функции $L(v)$ и втором утверждении леммы.

Используя первое утверждение леммы 1, можно корректно определить отображение $\mathring{S}^\varphi_{-t}$ для любой функции $\varphi$ из множества $\mathring{W}_T{}^*$ следующим образом: $\mathring{S}^\varphi_{-t}:(x,v)\to(\mathring{X}_\varphi,\mathring{V}_\varphi)$, где $(\mathring{X}_\varphi,\mathring{V}_\varphi)=\lim\limits_{n\to\infty}(X_{\varphi_n},V_{\varphi_n})$ и $\{\varphi_n\}$ — любая последовательность функций из $W_T$, сходящаяся в метрике $\rho_T$ к функции $\varphi$. Отображение $\mathring{S}^\varphi_{-t}$ обладает всеми необходимыми свойствами для того, чтобы оператор $K$ был определен на функциях из множества $\mathring{W}^*_T$.

Лемма 2. Пусть функция $\varphi(x,t)\in\mathring{W}^*_T$, тогда функция $K(\varphi)\in\in W_T$. Идея доказательства этого утверждения следующая. Для нормы $\|K(\varphi)\|$ имеем оценку $\|K(\varphi)\|\leqslant C_1\{C_0+2L(0)\|\varphi\|T\}$, где $C_1=1+$ $+(b-a)\sup\limits_{x,\xi\in[a,b]}\{|G(x,\xi)|+|G_x(x,\xi)|\}$ и $C_0=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}L(v)\,dv<\infty$. Непрерывность функции $K(\varphi)$ по $t$ удается доказать в предположении, что $f_0(x,v)\leqslant L(v)$, $\left|\frac{\partial f_0}{\partial x}\right|\leqslant L(v)$, $\left|\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|\leqslant L(v)$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}L(v)|v|\,dv<\infty$.

Далее, справедливо следующее утверждение. Пусть $T_0<\frac{1}{2C_1L(0)}$, $C_2>$ $>\frac{C_0}{1/C_1-2L(0)T_0}$ и функция $\varphi(X,t)\in W_{T_0}$ такая, что $\|\varphi\|\leqslant C_2$, тогда

$\|K(\varphi)\| \leqslant C_2$. Справедливость этого утверждения сразу следует из установленной выше оценки для $\|K(\varphi)\|$.

Обозначим через $\Phi$ подмножество пространства $\overset{\circ}{W}_{T_0}$, состоящее из функций $\{\varphi(x, t)\}$ с нормами $\|\varphi\| \leqslant C_2$. Из определения множества $\Phi$ следует, что оператор $K$ переводит функции из $\Phi$ в $\Phi$. Через $\Phi^*$ обозначим пополнение $\Phi$ в метрике $\rho_T$. Отметим, что $\Phi^* \subset \overset{\circ}{W}{}^*_{T_0}$.

Лемма 3. При некотором $T < T_0$ справедливы утверждения:

1. Если функция $\varphi(x, t) \in \Phi^*$, то функция $K(\varphi) \in \Phi$;
2. Оператор $K$ является сжимающим оператором на $\Phi$ в метрике $\rho_T$.

Первое утверждение леммы сразу следует из леммы 2. Приведем идею доказательства сжимаемости оператора $K$.

Пусть $\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t)$ — функции из $\Phi$.

$$\rho_T(K(\varphi_1), K(\varphi_2)) \leqslant C \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ t \in [0,T]}} \left| \iint\limits_{D(\varphi_1,t)} f_0(X_{\varphi_1}, V_{\varphi_1})\, dxdv - \iint\limits_{D(\varphi_2,t)} f_0(X_{\varphi_2}, V_{\varphi_2})\, dxdv \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ t \in [0,T]}} \iint\limits_{D(\varphi_1,t) \cap D(\varphi_2,t)} |f_0(X_{\varphi_1}, V_{\varphi_1}) - f_0(X_{\varphi_2}, V_{\varphi_2})|\, dxdv +$$

$$+ CL(0) \sup_{t \in [0,T]} \left\{ \iint\limits_{D(\varphi_1,t) \setminus D(\varphi_2,t)} dxdv + \iint\limits_{D(\varphi_2,t) \setminus D(\varphi_1,t)} dxdv \right\}.$$

Используя первое утверждение леммы 1, для первого интеграла можно доказать оценку:

$$\iint\limits_{D(\varphi_1,t) \cap D(\varphi_2,t)} |f_0(X_{\varphi_1}, V_{\varphi_1}) - f_0(X_{\varphi_2}, V_{\varphi_2})|\, dxdv \leqslant C_3 (T^2 + T)\, \rho_T(\varphi_1, \varphi_2),$$

где $C_3 < \infty$ не зависит от норм $\|\varphi_1\|$ и $\|\varphi_2\|$. Второй и третий интегралы оцениваются следующим образом. Множество точек $D(\varphi_1, t) \setminus D(\varphi_2, t)$ состоит из тех точек $(x, v)$, для которых $X_{\varphi_1} \in (a, b)$ и $X_{\varphi_2} \overline{\in} (a, b)$, но так как $|X_{\varphi_1} - X_{\varphi_2}| \leqslant t^2 \rho_T(\varphi_1, \varphi_2)$, то можно утверждать, что множество $D(\varphi_1, t) \setminus D(\varphi_2, t)$ состоит из тех точек $(x, v)$, для которых $X_{\varphi_1} \in (a, a + t^2 \rho_T(\varphi_1, \varphi_2)) \cup (b - t^2 \rho_T(\varphi_1, \varphi_2), b)$, кроме того, $V_{\varphi_1} \in (-C_4/t, C_4/t)$ по лемме 1.

Делая замену переменных $(x, v) \to (X_{\varphi i}, V_{\varphi i})$ с $i=1$ во втором интеграле и с $i=2$ в третьем интеграле и учитывая, что якобиан отображения $S^{\varphi}{}_{-t}$ равен единице, получим оценки:

$$\iint\limits_{D(\varphi_{1,2},t) \setminus D(\varphi_{2,1},t)} dxdv \leqslant 4C_4 T \rho_T(\varphi_1, \varphi_2).$$

Окончательно получим:

$$\rho_T(K(\varphi_1), K(\varphi_2)) \leqslant C\{4C_4 T + C_3(T^2 + T)\}\, \rho_T(\varphi_1, \varphi_2).$$

Выбирая $T$ таким, чтобы коэффициент перед $\rho_T(\varphi_1, \varphi_2)$ в последнем неравенстве был меньше единицы, получим условие сжимаемости оператора $K$ на множестве функций $\Phi$.

Для завершения доказательства теоремы следует заметить, что единственная неподвижная точка оператора $K$ находится в $\Phi^*$, но так как оператор $K$ переводит функции из $\Phi^*$ в $\Phi$, то единственная неподвижная точка оператора $K$ находится во множестве функций $\Phi$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность проф. А. А. Арсеньеву за ряд полезных обсуждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Иорданский С. В. Тр. МИАН, 1961, 60, с. 181.

Поступила в редакцию
23.02.83



УДК 535.42

## ФАЗОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИ ДИФРАКЦИИ БРЭГГА

**В. И. Балакший, Е. А. Никанорова, В. Н. Парыгин**

*(кафедра физики колебаний)*

1. При исследовании дифракции света на ультразвуке основное внимание уделяется, как правило, рассмотрению характеристик дифрагированной волны [1]. Однако несомненный интерес, особенно для решения прикладных задач акустооптики, представляет также световая волна, проходящая через область акустооптического взаимодействия без отклонения и формирующая в дальней зоне нулевой порядок дифракции. Эта волна тоже испытывает воздействие акустического поля, приводящее к изменению ее параметров.

В данной работе для случая дифракции Брэгга исследована зависимость амплитуды и фазы света в нулевом порядке дифракции от амплитуды акустической волны и угла падения света на область взаимодействия. Рассмотрены особенности прохождения через акустическое поле пространственно-модулированной световой волны. Исследован невзаимный эффект, заключающийся в различии фазовых скоростей световых волн, проходящих область взаимодействия в противоположных направлениях.

2. Предположим, что область акустооптического взаимодействия является изотропной средой и ограничена двумя параллельными плоскостями $x=0$ и $x=l$. По оси $z$ параллельно границам области взаимодействия распространяется плоская монохроматическая акустическая волна

$$a(z, t)=a_0\sin(Kz-\Omega t),$$

где $a_0$ — амплитуда, $K$ — волновое число, $\Omega$ — частота ультразвука.

Плоская световая волна с амплитудой $C^*$ падает на область взаимодействия под углом $\theta$, причем взаимная ориентация волновых векторов света и звука такова, что наблюдаются дифракционные максимумы нулевого и первого порядков. При брэгговской дифракции комплексная амплитуда волны нулевого порядка на выходе из области взаимодействия (в плоскости $x=l$) описывается выражением [2]

$$C_0=C^*\left[\cos\left(\frac{l}{2}\sqrt{q^2+\eta^2}\right)+\frac{i\eta}{\sqrt{q^2+\eta^2}}\sin\left(\frac{l}{2}\sqrt{q^2+\eta^2}\right)\right]\exp\left(-\frac{i\eta l}{2}\right). \quad (1)$$

Параметр $q$ определяется амплитудой акустической волны:

$$q=k_0^2\Delta n/(nk_{0x})=k_0n^2pa_0/(2\cos\theta),$$

а параметр $\eta$ характеризует степень фазового рассогласования при акустооптическом взаимодействии:

$$\eta=k_{0x}-k_{1x}=k_0\cos\theta-k_1\cos\psi.$$