

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Иорданский С. В. Тр. МИАН, 1961, 60, с. 181.

Поступила в редакцию
23.02.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1983, Т. 24, № 6

УДК 535.42

ФАЗОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИ ДИФРАКЦИИ БРЭГГА

В. И. Балакший, Е. А. Никанорова, В. Н. Парыгин

(кафедра физики колебаний)

1. При исследовании дифракции света на ультразвуке основное внимание уделяется, как правило, рассмотрению характеристик дифрагированной волны [1]. Однако несомненный интерес, особенно для решения прикладных задач акустооптики, представляет также световая волна, проходящая через область акустооптического взаимодействия без отклонения и формирующая в дальней зоне нулевой порядок дифракции. Эта волна тоже испытывает воздействие акустического поля, приводящее к изменению ее параметров.

В данной работе для случая дифракции Брэгга исследована зависимость амплитуды и фазы света в нулевом порядке дифракции от амплитуды акустической волны и угла падения света на область взаимодействия. Рассмотрены особенности прохождения через акустическое поле пространственно-модулированной световой волны. Исследован невязанный эффект, заключающийся в различии фазовых скоростей световых волн, проходящих область взаимодействия в противоположных направлениях.

2. Предположим, что область акустооптического взаимодействия является изотропной средой и ограничена двумя параллельными плоскостями $x=0$ и $x=l$. По оси z параллельно границам области взаимодействия распространяется плоская монохроматическая акустическая волна

$$a(z, t) = a_0 \sin(Kz - \Omega t),$$

где a_0 — амплитуда, K — волновое число, Ω — частота ультразвука.

Плоская световая волна с амплитудой C^* падает на область взаимодействия под углом θ , причем взаимная ориентация волновых векторов света и звука такова, что наблюдаются дифракционные максимумы нулевого и первого порядков. При брэгговской дифракции комплексная амплитуда волны нулевого порядка на выходе из области взаимодействия (в плоскости $x=l$) описывается выражением [2]

$$C_0 = C^* \left[\cos\left(\frac{l}{2} \sqrt{q^2 + \eta^2}\right) + \frac{i\eta}{\sqrt{q^2 + \eta^2}} \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{q^2 + \eta^2}\right) \right] \exp\left(-\frac{i\eta l}{2}\right). \quad (1)$$

Параметр q определяется амплитудой акустической волны:

$$q = k_0^2 \Delta n / (nk_{0x}) = k_0 n^2 p a_0 / (2 \cos \theta),$$

а параметр η характеризует степень фазового рассогласования при акустооптическом взаимодействии:

$$\eta = k_{0x} - k_{1x} = k_0 \cos \theta - k_1 \cos \psi.$$

Здесь $k_0 = \omega_0 n / c$; $k_1 = \omega_1 n / c$; ω_0, ω_1 — частоты световых волн в нулевом и первом порядках; k_{0x}, k_{1x} — проекции волновых векторов k_0 и k_1 на ось x ; n — показатель преломления невозмущенной среды; Δn — амплитуда изменения показателя преломления под действием звука; ρ — фотоупругий коэффициент; ψ — угол дифракции. При малых углах θ и ψ

$$q \approx (k_0/2) n^2 \rho a_0; \quad \eta \approx K(\theta + K/(2k_0)) = K(\theta - \theta_B), \quad (2)$$

где $\theta_B = -K/(2k_0)$ — угол Брэгга.

Выражение (1) можно преобразовать к виду

$$C_0 = C^* A \exp(i\varphi). \quad (3)$$

Тогда относительная амплитуда A и фаза φ световой волны в нулевом порядке дифракции определяется следующим образом:

$$A = \sqrt{1 - \frac{q^2}{q^2 + \eta^2} \sin^2\left(\frac{l}{2} \sqrt{q^2 + \eta^2}\right)}, \quad (4)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{\eta \operatorname{tg}\left(\frac{l}{2} \sqrt{q^2 + \eta^2}\right)}{\sqrt{q^2 + \eta^2}} \right] - \frac{\eta l}{2} + f\left(\frac{l}{2} \sqrt{q^2 + \eta^2}\right), \quad (5)$$

где

$$f(y) = \begin{cases} \pi & \text{при } \frac{\pi}{2} + 2\pi m < y < \frac{3}{2}\pi + 2\pi m \quad (m = 0, 1, 2 \dots), \\ 0 & \text{при других } y. \end{cases}$$

На рис. 1 представлены графики зависимости амплитуды A и фазы φ от величины ql при различных расстройках ηl (так как $q \sim a_0$, то такой же характер имеют зависимости A и φ от амплитуды акустической волны). Значение $\eta l = 0$ соответствует падению света под углом Брэгга ($\theta = \theta_B$). В этом случае амплитуда световой волны изменяется по косинусоидальному закону. При прохождении через точку $ql = \pi$,

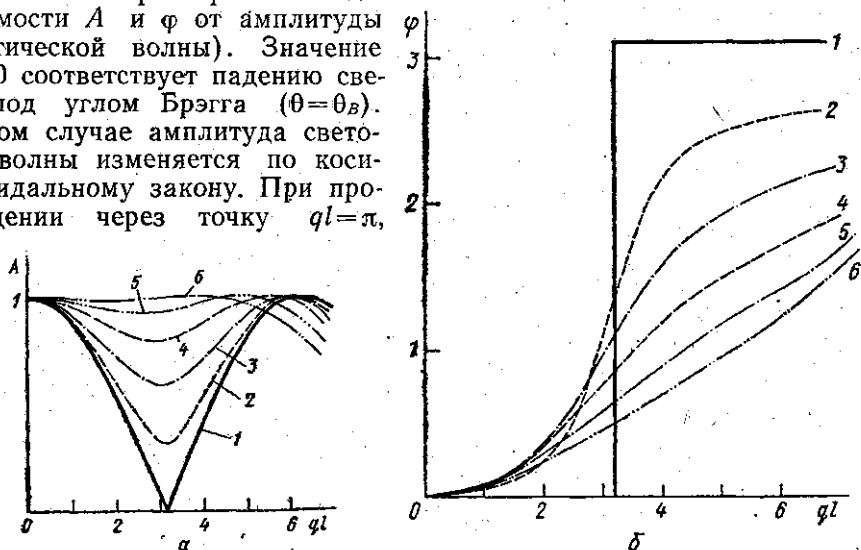


Рис. 1. Зависимость амплитуды и фазы световой волны в нулевом порядке дифракции от эффективности дифракции ql при различных расстройках: $\eta l = 0$ (1), 1 (2), 2 (3), 3 (4), 4 (5) и 5 (6)

в которой $A = 0$ (наблюдается только первый порядок дифракции), фаза волны скачком меняется на π . Если расстройка $\eta l \neq 0$, то при любой акустической мощности интенсивность света в нулевом по-

рядке отлична от нуля. С ростом мощности фаза φ монотонно увеличивается. Из рис. 1 видно, что при $\eta l > 3$ амплитуда световой волны почти не меняется в достаточно широком интервале значений ql , в то время как фаза изменяется почти линейно. Это дает возможность управлять фазой волны нулевого порядка путем изменения мощности ультразвука.

Зависимость фазы световой волны, прошедшей через звуковой пучок, от мощности звука показывает, что волну в нулевом порядке дифракции нельзя рассматривать лишь как непродифрагировавшую часть падающего света. При больших мощностях ультразвука происходит активный обмен энергией между световыми волнами в нулевом и первом порядках дифракции. С точки зрения фотон-фононного взаимодействия механизм дифракции света на акустической волне соответствует системе многократных переходов между разрешенными уровнями [3]. Нулевой порядок дифракции образуется в результате переходов фотонов на нулевой уровень ($0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ и т. д.). Поэтому, несмотря на то что волна нулевого порядка соответствует свету, прошедшему через область взаимодействия без отклонения, она испытывает воздействие звука. Это и приводит к зависимости фазы волны нулевого порядка от мощности ультразвука.

3. Рассмотрим теперь более общий случай, когда через область взаимодействия проходит световой пучок с произвольной пространственной структурой (в частном случае это может быть световая волна, несущая изображение какого-либо объекта). Поскольку при тех уровнях световой мощности, которые соответствуют обычным условиям эксперимента, акустооптическое взаимодействие является линейным по отношению к световой волне, то можно воспользоваться принципом суперпозиции.

Разложим падающую световую волну $u^*(z)$ с помощью пространственного фурье-преобразования в спектр по плоским волнам:

$$u^*(z) = \int_{-\infty}^{\infty} U^*(\theta) \exp(ik_0 \theta z) d\theta.$$

Каждая из плосковолновых составляющих углового спектра $U^*(\theta)$, проходя через ультразвуковой пучок, независимо взаимодействует с акустическим полем в соответствии с формулой (1). Различие в углах падения θ этих составляющих приводит к тому, что их амплитуды и фазы изменяются по-разному. Поэтому распределение светового поля на выходе из области взаимодействия $u_0(z)$ в общем случае отличается от $u^*(z)$. Из (2) и (3) следует, что угловой спектр прошедшего света можно записать в виде

$$U_0(\theta) = U^*(\theta) A(\theta) \exp[i\varphi(\theta)].$$

Тогда

$$u_0(z) = \int_{-\infty}^{\infty} U^*(\theta) A(\theta) \exp[i\varphi(\theta)] \exp(ik_0 \theta z) d\theta. \quad (6)$$

Представленные на рис. 2 угловые зависимости амплитуды A и фазы φ (поскольку $\eta \sim \theta$) позволяют оценить характер и величину искажений светового поля, возникающих при прохождении света через ультразвуковой пучок. При малой акустической мощности ($ql \ll \pi$), когда в дифрагированный пучок рассеивается небольшая часть падаю-

шего излучения, влияние акустического поля незначительно, и структура прошедшего пучка практически совпадает со структурой падающего света. Наиболее сильно воздействие акустического поля проявляется при $ql \gg \pi$. Так, если световой пучок падает на область взаимодействия под углом Брэгга, то в случае $ql = \pi$ осевая компонента углового спектра $U^*(\theta)$ (постоянная составляющая изображения) полностью подавляется, что приводит к резкому увеличению контрастности изображения.

Интересное явление должно наблюдаться при $ql \approx 2\pi$.

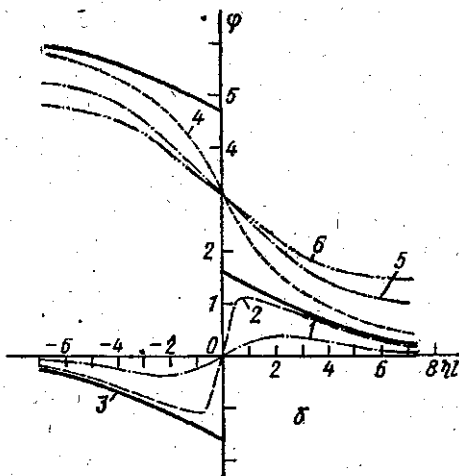
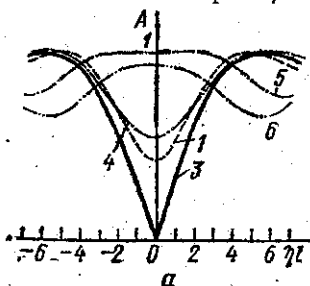


Рис. 2. Угловые зависимости амплитуды и фазы световой волны в нулевом порядке дифракции при различных значениях эффективности дифракции: $ql=2(1)$, $3(2)$, $\pi(3)$, $4(4)$, $6(5)$ и $7(6)$

Из рис. 2 видно, что в этом случае амплитуда A слабо зависит от угла θ ($A \approx 1$), тогда как фаза φ изменяется в широких пределах практически по линейному закону:

$$\varphi \approx \pi - a\eta l = \pi - aKl(\theta - \theta_B). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получаем

$$\begin{aligned} u_0(z) &= \exp[i(\pi + aKl\theta_B)] \int_{-\infty}^{\infty} U^*(\theta) \exp\left[i\left(z - \frac{aKl}{k_0}\right)k_0\theta\right] d\theta = \\ &= \exp\left[i(\pi + aKl\theta_B)\right] u^*\left(z - \frac{aKl}{k_0}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношение (8) указывает на то, что под действием акустического поля происходит поступательное смещение изображения по оси z на величину $\Delta z = aKl/k_0$. Графики рис. 2 позволяют оценить величину этого смещения. Для линейного участка зависимости $\varphi(\theta)$

$$a = \Delta\varphi/\Delta(\eta l) = \Delta\varphi/(Kl\Delta\theta).$$

Учитывая, что $2\pi/(\Delta\theta k_0) = d$, где d — пространственный период изображения, получаем

$$\Delta z/d = \Delta\varphi/(2\pi).$$

При $ql = 2\pi$ $\Delta\varphi \approx 220^\circ$, следовательно, акустическое поле должно вызывать смещение изображения приблизительно на $2/3$ его пространственного периода.

4. В работе [4] впервые было обращено внимание на невзаимный эффект. Однако в указанной работе исследование проводилось при-

ближенным методом, что и позволило авторам получить оценочные результаты, имеющие ограниченную область применимости. Для исследования невязимного эффекта рассмотрим случай, когда слева на область взаимодействия падает плоская световая волна под углом Брэгга; при этом наблюдаются дифракционные максимумы нулевого и первого порядков. Фаза волны нулевого порядка определяется выражением

$$\varphi_1 = f(ql/2).$$

При изменении направления распространения света на противоположное будут наблюдаться дифракционные максимумы нулевого и минус первого порядков. В этом случае угол падения света уже не является

брэгговским из-за различия частот волн первого и минус первого порядков. Таким образом, если для световой волны, падающей слева на область взаимодействия, выполняется условие Брэгга, то для волны, проходящей область точно в противоположном направлении, всегда будет существовать некоторая расстройка ηl . Фаза φ_2 волны нулевого порядка определяется в этом случае формулой (5) при замене

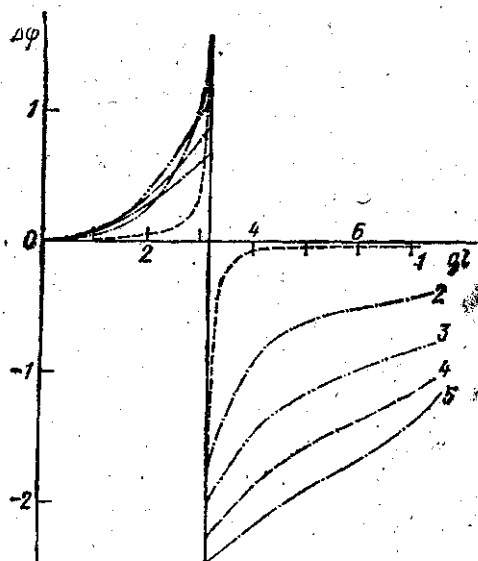


Рис. 3. Зависимость величины $\Delta\varphi$, характеризующей невязимный эффект, от эффективности дифракции ql при различных расстройках ηl : 1 — $\eta l = 0,1$, $f = 1,5 \cdot 10^9$ Гц; 2 — $\eta l = 1$, $f = 1,5 \cdot 10^9$ Гц; 3 — $\eta l = 2$, $f = 3 \cdot 10^9$ Гц; 4 — $\eta l = 3$, $f = 5 \cdot 10^9$ Гц; 5 — $\eta l = 4$, $f = 6 \cdot 10^9$ Гц

η на $\eta' = k_{-1x} - k_{0x}$ (k_{-1x} — проекция волнового вектора волны (—1)-го порядка на ось x).

На рис. 3 изображена зависимость величины $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, характеризующей невязимный эффект, от эффективности дифракции ql при различных расстройках ηl . Величина расстройки зависит от частоты ультразвука Ω . Нетрудно показать, что в случае малых углов

$$\eta = \frac{\Omega n}{c} \left(2 + \frac{K^2}{8k_0^2} \right).$$

На рис. 3 каждому значению ηl поставлена в соответствие частота ультразвука для случая, когда $l = 1$ см, $n = 1,5$, $\omega_0 = 3 \cdot 10^{15}$ рад/с, скорость звука $u = 5 \cdot 10^5$ см/с. Графики, изображенные на рис. 3, показывают, что на высоких частотах ультразвука величина невязимного эффекта оказывается весьма значительной. В точке $ql = \pi$ каждая из кривых имеет разрыв со скачком на $\Delta(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi$. В этой точке невязимный эффект не определен, так как амплитуда волны, проходящей область взаимодействия под углом Брэгга, обращается в нуль.

Невязимный эффект может играть существенную роль в устройствах, использующих прохождение световой волной области акустооптического взаимодействия в противоположных направлениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Магдич Л. Н., Молчанов В. Я. Акустооптические устройства и их применение. М.: Сов. радио, 1978. [2] Парыгин В. Н. Радиотехн. и электроника, 1974, 19, № 1, с. 38. [3] Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Радиотехн. и электроника, 1973, 18, № 4, с. 703. [4] Зильберман Г. Е., Купченко Л. Ф. Радиотехн. и электроника, 1975, 20, № 11, с. 2347.

Поступила в редакцию
24.02.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 6

УДК 528.21.22

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РЯДА ЛАПЛАСА ПРИ ПОВОРОТАХ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Н. А. Чуйкова

(ГАИШ)

В отличие от ряда Лежандра, который легко преобразуется при повороте системы координат путем использования классической теоремы сложения для полиномов Лежандра, для ряда Лапласа аналогичные формулы можно получить только на основе теоремы сложения для обобщенных сферических функций, выводимой в теории представлений групп вращений [1]:

$$e^{-i(m\varphi+n\psi)} P_{mn}^l(\cos\theta) = \sum_{k=-l}^l e^{-i[m\varphi_1+k(\psi_1+\varphi_2)+n\psi_2]} P_{mk}^l(\cos\theta_1) P_{kn}^l(\cos\theta_2). \quad (1)$$

Здесь θ, φ, ψ — углы Эйлера для произведения двух вращений с углами $\theta_1, \varphi_1, \psi_1$ и $\theta_2, \varphi_2, \psi_2$;

$$P_{mn}^l(z) = P_{nm}^l(z) = \frac{(1)^{l-n} i^{n-m}}{2^l} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-n)! (l+n)! (l-m)!}} (1+z)^{\frac{-m-n}{2}} \times \\ \times (1-z)^{\frac{n-m}{2}} \frac{d^{l-m}}{dz^{l-m}} [(1-z)^{l-n} (1+z)^{l+n}].$$

При $n=m=0$ полином $P_{00}^l(z)$ переходит в многочлен Лежандра $P_l(z)$, а при $m=0$ выражается через присоединенный полином Лежандра

$$P_{0n}^l(z) = i^n \sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}} P_n^l(z).$$

Вращение g трехмерного эйлера пространства, задаваемое углами Эйлера φ, θ, ψ , является произведением вращений на углы ψ вокруг оси OZ , θ вокруг оси OX и φ вокруг оси OZ . Рассмотрим сферические треугольники, соответствующие вращению $g_1 \times g_2$ и проходящие через северный полюс Z (рисунок). Пусть в результате первого вращения $g_2(\varphi_2, \theta_2, \psi_2)$ северный полюс Z переходит в точку $Z_0(\theta_0, \lambda_0)$, а точка $Z^0(\theta^0, \lambda^0)$ переходит в начальный северный полюс. Углы Эйлера можно тогда следующим образом выразить через сферические координаты этих точек: $\theta_2 = \theta_0 = \theta^0$ — полярное расстояние, $\psi_2 = \lambda_0 + \pi/2$, $\varphi_2 = \pi/2 - \lambda^0$. Углы

