

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Магдич Л. Н., Молчанов В. Я. Акустооптические устройства и их применение. М.: Сов. радио, 1978. [2] Парыгин В. Н. Радиотехн. и электроника, 1974, 19, № 1, с. 38. [3] Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Радиотехн. и электроника, 1973, 18, № 4, с. 703. [4] Зильберман Г. Е., Купченко Л. Ф. Радиотехн. и электроника, 1975, 20, № 11, с. 2347.

Поступила в редакцию
24.02.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 6

УДК 528.21.22

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РЯДА ЛАПЛАСА ПРИ ПОВОРОТАХ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Н. А. Чуйкова

(ГАИШ)

В отличие от ряда Лежандра, который легко преобразуется при повороте системы координат путем использования классической теоремы сложения для полиномов Лежандра, для ряда Лапласа аналогичные формулы можно получить только на основе теоремы сложения для обобщенных сферических функций, выводимой в теории представлений групп вращений [1]:

$$e^{-i(m\varphi+n\psi)} P_{mn}^l(\cos\theta) = \sum_{k=-l}^l e^{-i[m\varphi_1+k(\psi_1+\varphi_2)+n\psi_2]} P_{mk}^l(\cos\theta_1) P_{kn}^l(\cos\theta_2). \quad (1)$$

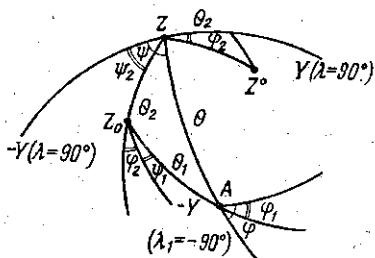
Здесь θ, φ, ψ — углы Эйлера для произведения двух вращений с углами $\theta_1, \varphi_1, \psi_1$ и $\theta_2, \varphi_2, \psi_2$;

$$P_{mn}^l(z) = P_{nm}^l(z) = \frac{(1)^{l-n} i^{n-m}}{2^l} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-n)! (l+n)! (l-m)!}} (1+z)^{\frac{-m-n}{2}} \times \\ \times (1-z)^{\frac{n-m}{2}} \frac{d^{l-m}}{dz^{l-m}} [(1-z)^{l-n} (1+z)^{l+n}].$$

При $n=m=0$ полином $P_{00}^l(z)$ переходит в многочлен Лежандра $P_l(z)$, а при $m=0$ выражается через присоединенный полином Лежандра

$$P_{0n}^l(z) = i^n \sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}} P_n^l(z).$$

Вращение g трехмерного эйлера пространства, задаваемое углами Эйлера φ, θ, ψ , является произведением вращений на углы ψ вокруг оси OZ , θ вокруг оси OX и φ вокруг оси OZ . Рассмотрим сферические треугольники, соответствующие вращению $g_1 \times g_2$ и проходящие через северный полюс Z (рисунок). Пусть в результате первого вращения $g_2(\varphi_2, \theta_2, \psi_2)$ северный полюс Z переходит в точку $Z_0(\theta_0, \lambda_0)$, а точка $Z^0(\theta^0, \lambda^0)$ переходит в начальный северный полюс. Углы Эйлера можно тогда следующим образом выразить через сферические координаты этих точек: $\theta_2 = \theta_0 = \theta^0$ — полярное расстояние, $\psi_2 = \lambda_0 + \pi/2$, $\varphi_2 = \pi/2 - \lambda^0$. Углы



Эйлера θ_1, ψ_1 второго вращения g_1 выражаются через сферические координаты точки A в системе координат с полюсом в точке Z_0 : θ_1 — полярное расстояние, $\psi_1 = \lambda_1 + \pi/2$, а углы Эйлера произведения вращений $g_1 \times g_2$ выражаются через сферические координаты точки A в начальной системе координат: θ — полярное расстояние, $\psi = \lambda + \pi/2$.

Полагая в (1) $m=0$ и подставляя выражения для эйлеровых углов, получим

$$e^{-in\lambda} P_l^n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{(l+n)!}{(l-n)!}} \sum_{k=-l}^l (-1)^k \sqrt{\frac{(l-k)!}{(l+k)!}} e^{-i[n\lambda_0 + k(\lambda_1 - \lambda_0)]} \times \\ \times P_l^k(\cos \theta_1) {}'P_{kn}^l(\cos \theta_0), \quad (2)$$

где

$$P_l^{-k}(z) = (-1)^k \frac{(l-k)!}{(l+k)!} P_l^k(z), \quad {}'P_{kn}^l(z) = i^{k-n} P_{kn}^l(z) \text{ — действительно.}$$

Рассматривая здесь по отдельности действительную и мнимую части, получим формулы перехода от сферических гармоник начальной системы координат $P_l^n(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos n\lambda \\ \sin n\lambda \end{Bmatrix}$ к сферическим гармоникам $P_l^k(\cos \theta_1) \begin{Bmatrix} \cos k\lambda_1 \\ \sin k\lambda_1 \end{Bmatrix}$ в новой системе, полюс которой проходит через точку с координатами θ_0, λ_0 относительно начальной системы. Коэффициентами в таком преобразовании служат обобщенные сферические функции координат полюса.

Если угол поворота θ_0 достаточно мал, то формулу (2) можно упростить, используя приближенное соотношение

$${}'P_{kn}^l(\cos \theta_0) \approx {}'P_{kn}^l(1) + \frac{d}{d\theta} [{}'P_{kn}^l(\cos \theta_0)]_{\theta_0=0} \theta_0,$$

где

$${}'P_{kn}^l(1) = \delta_{kn},$$

$$\frac{d}{d\theta} [{}'P_{kn}^l(\cos \theta_0)]_{\theta_0=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n \pm 1, \\ \pm \frac{1}{2} \sqrt{(l \pm k)(l \mp n)} & \text{при } k = n \pm 1. \end{cases}$$

Получим при θ_0 малом

$$e^{-in\lambda} P_l^n(\cos \theta) = (-1)^n e^{-in(\lambda_1 - \lambda_0 + \lambda_0)} P_l^n(\cos \theta_1) + \\ + \frac{(-1)^n \theta_0}{2} \{ -(l+n)(l-n+1) e^{-i[(n-1)(\lambda_1 - \lambda_0) + n\lambda_0]} \times \\ \times P_l^{n-1}(\cos \theta_1) + e^{-i[(n+1)(\lambda_1 - \lambda_0) + n\lambda_0]} P_l^{n+1}(\cos \theta_1) \}.$$

Для нормированных сферических функций теорема сложения (2) имеет более компактный вид:

$$e^{-in\lambda} \bar{P}_l^n(\cos \theta) = \sum_{k=-l}^l \frac{\sigma_k}{\sigma_n} (-1)^k e^{i[n\lambda_0 + k(\lambda_1 - \lambda_0)]} \bar{P}_l^k(\cos \theta_1) {}'P_{kn}^l(\theta_0), \quad (3)$$

где

$$\bar{P}_l^{-k}(z) = (-1)^k \bar{P}_l^k(z); \quad \sigma_0 = \sqrt{2}, \quad \sigma_{k \neq 0} = 1.$$

Переходя к действительной форме, (3) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{P}_i^n(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} n\lambda &= \sum_{k=0}^i \left(\frac{1}{\sigma_n \sigma_k} \left[(-1)^k {}'P_{kn}^i(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\lambda_0 - k\lambda^0) + \right. \right. \\ &+ {}'P_{-k,n}^i(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\lambda_0 + k\lambda^0) \left. \right] \bar{P}_i^k(\cos \theta_1) \cos k\lambda_1 \mp \\ &\mp \left[(-1)^k {}'P_{kn}^i(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (n\lambda_0 - k\lambda^0) + {}'P_{-k,n}^i \times \right. \\ &\times (\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (n\lambda_0 + k\lambda^0) \left. \right] \bar{P}_i^k(\cos \theta_1) \sin k\lambda_1 \Big). \end{aligned}$$

Чтобы найти, как меняются коэффициенты ряда Лапласа при повороте системы координат, запишем ряд Лапласа $Y = \sum_{i=0}^l Y_i$ в комплексной форме:

$$Y_i = \sum_{n=0}^i (a_{in} \cos n\lambda + b_{in} \sin n\lambda) \bar{P}_i^n(\cos \theta) = \sum_{n=-i}^i c_{in} e^{-in\lambda} \bar{P}_i^n(\cos \theta),$$

где

$$\begin{aligned} c_{i0} &= a_{i0}, \quad c_{in} = (a_{in} + ib_{in})/2, \\ c_{i,-n} &= (-1)^n (a_{in} - ib_{in})/2. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (3), получим выражение для Y_i в повернутой системе координат:

$$Y_i = \sum_{k=-i}^i c_{ik}^* e^{-ik\lambda_1} \bar{P}_i^k(\cos \theta_1),$$

где

$$c_{ik}^* = (-1)^k \sum_{n=-i}^i \frac{\sigma_k}{\sigma_n} c_{in} e^{-i[n\lambda_0 - k\lambda^0]} {}'P_{kn}^i(\cos \theta_0).$$

Чтобы перейти к рядам Лапласа с действительными коэффициентами, используем формулы

$$\begin{aligned} a_{i0} &= c_{i0}, \quad a_{ik} = c_{ik} + (-1)^k c_{i,-k}, \\ b_{ik} &= -i(c_{ik} - (-1)^k c_{i,-k}). \end{aligned}$$

Произведя необходимые преобразования, получим

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a_{ik}^* \\ b_{ik}^* \end{Bmatrix} &= \sum_{n=0}^i \frac{(-1)^k}{\sigma_n \sigma_k} \left(\left[\begin{Bmatrix} a_{in} \\ b_{in} \end{Bmatrix} \cos(n\lambda_0 - k\lambda^0) \pm \right. \right. \\ &\pm \begin{Bmatrix} b_{in} \\ a_{in} \end{Bmatrix} \sin(n\lambda_0 - k\lambda^0) \left. \right] {}'P_{kn}^i(\cos \theta_0) \pm (-1)^n \left[\begin{Bmatrix} a_{in} \\ b_{in} \end{Bmatrix} \cos(n\lambda_0 + k\lambda^0) \pm \right. \\ &\left. \left. \pm \begin{Bmatrix} b_{in} \\ a_{in} \end{Bmatrix} \sin(n\lambda_0 + k\lambda^0) \right] {}'P_{k,-n}^i(\cos \theta_0) \right). \end{aligned}$$

Для нормированной степенной дисперсии в повернутой системе координат

$$D_l^* = \sum_{k=0}^l (a_{lk}^2 + b_{lk}^2) = 2 \sum_{k=-l}^l \frac{(-1)^k}{\sigma_k^2} c_{lk}^* c_{l,-k}^* =$$

$$= 2 \sum_{n=-l}^l \frac{1}{\sigma_n} c_{ln} e^{-in\lambda_0} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{\sigma_m} c_{lm} e^{-im\lambda_0} \sum_{k=-l}^l (-1)^k P_{kn}^l(\cos \theta_0) P_{-k,m}^l(\cos \theta_0).$$

Используя равенство [1]

$$\sum_{k=-l}^l (-1)^k P_{kn}^l(z) P_{-k,m}^l(z) = (-1)^n \delta_{n,-m},$$

получим

$$D_l^* = 2 \sum_{n=-l}^l \frac{(-1)^n}{\sigma_n^2} c_{ln} c_{l,-n} = D_l,$$

т. е. нормированная степенная дисперсия не меняется при повороте системы координат.

В заключение отметим, что другое решение поставленной проблемы было получено в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965. [2] Levis S. L. J. Astronaut. Sc., 1971, 18, N 4, p. 217.

Поступила в редакцию
03.03.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 6

УДК 621.373.826.038.824

ГЕНЕРАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РАСТВОРОВ КРАСИТЕЛЕЙ ПРИ ЛАМПОВОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

А. М. Салецкий, В. И. Южаков, В. И. Примак

(кафедра общей физики для физического факультета)

Использование в качестве активных лазерных сред многокомпонентных растворов красителей, позволяющих за счет переноса энергии возбуждения увеличить мощность и расширить спектральный диапазон генерации, обусловило в последние годы повышенный интерес к ним [1, 2]. В то же время бинарные растворители, вызывая спектральную неоднородность среды [2] и препятствуя интеркомбинационным процессам $S_1 \xrightarrow{h\nu} T_1$ и нежелательным фотохимическим реакциям [3], могут довольно значительно улучшать генерационные свойства растворов красителей. Действительно, различие в соотношении состава сольватных оболочек молекул красителей, которое наблюдается в бинарных растворителях и которое может достигать нескольких сотен процентов [4], приводит к значительному уширению электронных уровней молекул красителей. Влияние этих эффектов на ге-