

С 15, р. 1396. [10] Ali S., Bodmer A. R. Nucl. Phys., 1966, 80, р. 99. [11] Колесников Н. Н., Тарасов В. И., Старосотников М. И. Деп. ВИНТИ, № 3832-80. [12] Колесников Н. Н., Тарасов В. И. Изв. вузов. Физика, 1977, № 7, с. 98. [13] Колесников Н. Н., Копылов В. А. Изв. вузов. Физика, 1981, № 9, с. 114. [14] Колесников Н. Н., Копылов В. А., Колесов А. В. Тез. докл. 32-го совещ. по ядерной спектроскопии и структуре атом. ядра. Л.: Наука, 1982, с. 187. [15] Lich D. D. Nucl. Phys., 1972, A 178, р. 375. [16] Pniewski J., Ziemińska D. Каон-ядерное взаимодействие и гиперядра. М.: Наука, 1979, с. 187. [17] Mondal P., Saha M. Canad. J. Phys., 1980, 58, р. 300.

Поступила в редакцию
04.10.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 530.145

ПЯТИМЕРИЕ И ТЕОРИЯ АТОМА ВОДОРОДА

Ю. С. Владимиров, В. В. Кислов

(кафедра теоретической физики)

1. Введение. Зависимость физических величин от пятой координаты в пятимерной теории поля. Как известно, пятимерный подход к построению объединенной теории гравитации и электромагнетизма впервые был предложен в работе Т. Калуцы [1]. Уже первые варианты теории показали, что 15 пятимерных уравнений типа уравнений Эйнштейна естественным образом распадаются на 10 стандартных электровакуумных уравнений Эйнштейна, 4 уравнения второй пары уравнений Максвелла (без источников) и 15-е уравнение, которое предполагает возможность ввода еще одного (скалярного) поля. Существенной чертой первых вариантов теории является условие цилиндричности (независимости) геометрических величин по пятой координате.

Однако даже в этих вариантах теории условие цилиндричности не распространялось на негеометрические (внешние) величины, например на волновые функции полей. Последние могли зависеть от x^5 , причем тогда операторы пространственно-временного дифференцирования должны были заменяться на калибровочно-инвариантные операторы [2]:

$$\partial_{\mu}^{+} \psi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{G_{5\mu}}{G_{55}} \frac{\partial}{\partial x^5} \right) \psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{2\sqrt{k}}{c^2} A_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^5} \right) \psi, \quad (1)$$

где учтено, что векторный электромагнитный потенциал A_{μ} связан с компонентами пятимерной метрики G_{AB} соотношением $A_{\mu} = -\frac{c^2}{2\sqrt{k}} \times \frac{G_{5\mu}}{G_{55}}$, k — ньютоновская постоянная тяготения. (Здесь и в дальнейшем греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3.)

Заметим, что оператор (1) совпадает с оператором, используемым в стандартной электродинамике: $\partial_{\mu}^{+} \psi \equiv \left(\partial_{\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu} \right) \psi$, если предположить специальный вид зависимости волновой функции заряженного скалярного поля ψ от пятой координаты:

$$\psi = \psi(x^{\mu}) \cdot \exp \left(-\frac{iec}{2\sqrt{k}\hbar} x^5 \right). \quad (2)$$

Легко также показать, что известные калибровочные (градиентные) преобразования электромагнитного потенциала A_{μ} и волновых функций

ψ являются следствием допустимых преобразований пятой координаты:
 $x^5 = x^5 + f(x^0, x^1, x^2, x^3)$.

В дальнейшем удалось показать, что нет надобности вводить волновые функции заряженного скалярного поля ψ внешним (негеометрическим) образом. Их можно получить из пятнадцатой компоненты пятимерного метрического тензора G_{55} . Для этого следует положить

$$\sqrt{-G_{55}} = \left[1 + b\psi \cdot \exp\left(-\frac{iec}{2\sqrt{k}\hbar} x^5\right) - b\psi^* \exp\left(\frac{iec}{2\sqrt{k}\hbar} x^5\right) \right]^{2/3}, \quad (3)$$

где $b = \frac{\hbar}{2c^2} \sqrt{\frac{3\pi k}{m}}$ — константа, $\psi^*(x^5)$ — комплексно-сопряженная волновая функция. Найденное соотношение (3) означает обобщение ранее использованного условия цилиндричности по x^5 до условия своеобразной цикличности (замкнутости) геометрии по пятому измерению. Вид зависимости от x^5 в (3) соответствует (2). Напомним, что условие замкнутости по x^5 впервые вводилось в работе Эйнштейна и Бергмана [3]. В нашей работе [2] было показано, что в такой пятимерной теории получается система из 10 уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса заряженной материи, 4 уравнений второй пары Максвелла с электрическим током геометрического происхождения и уравнения Клейна—Фока для ψ . Отмечалось, что зависимость от x^5 в стандартной теории отсутствует вследствие того, что период цикличности по x^5 чрезвычайно мал по сравнению с расстояниями, для которых пишутся уравнения. Таким образом, на стандартные уравнения можно смотреть как на уравнения, полученные усреднением по пятой координате.

Следует особо подчеркнуть, что предложенный в (2) и (3) вид зависимости от x^5 найден эмпирически. Эта зависимость, безусловно, не является случайной и отражает некие важные закономерности мироздания. Желательно было бы разобраться в более глубокой физической подоплеке этого факта. В частности, возникает ряд вопросов о возможных проявлениях зависимости от пятой координаты в микромире. Оказывается, такое проявление можно усмотреть уже в теории атома водорода. Более того, почти все необходимое для этого можно найти в работах Фока [4—6] и работе Хиллерааса [7] начала 30-х годов. Однако в этих работах не была установлена связь полученных результатов с пятимерной теорией. Сделать это — цель данной статьи.

2. Результат Фока — 0(4)-симметрия уровней атома водорода. В. А. Фок показал, что нерелятивистское уравнение Шрёдингера в задаче об атоме водорода в некотором абстрактном импульсном пространстве можно интерпретировать как интегральное уравнение на собственные значения для потенциала на трехмерной гиперсфере в четырехмерном евклидовом пространстве, которое обладает, следовательно, 0(4)-симметрией.

Воспользуемся методикой, отличной от использованной Фоком [4] и более близкой к изложенной в работе Хиллерааса [7]. В качестве исходного выберем нерелятивистское соотношение между 3-импульсом p и энергией E в центральном кулоновском поле:

$$\frac{p^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{r} = E \quad \text{или} \quad (p^2 - 2\mu E)r = 2\mu Ze^2. \quad (4)$$

Перейдем от этого выражения к дифференциальному уравнению в импульсном представлении. Для этого нужно, во-первых, предварительно возвести (4) в квадрат, во-вторых, позаботиться о правильном вы-

боре порядка операторов \hat{p} и \hat{r} . Можно показать, что правильный порядок таков:

$$(\hat{p}^2 - 2\mu E) \hat{r} (\hat{p}^2 - 2\mu E) \hat{r} \psi = 4\mu^2 Z^2 e^4 \psi. \quad (5)$$

В-третьих, следует прокоммутировать операторы \hat{r} и $(\hat{p}^2 - 2\mu E)$, чтобы r входило квадратично. Для этого воспользуемся известными правилами коммутации операторов \hat{r} и \hat{p} :

$$\hat{r} (\hat{p}^2 - 2\mu E) = (\hat{p}^2 - 2\mu E) \hat{r} + 2i\hbar (p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3) + \frac{2(i\hbar)^2}{r}. \quad (6)$$

В-четвертых, следует взять операторы \hat{x}_j в импульсном представлении, т. е. положить $x_j \rightarrow i\hbar \partial/\partial p_j$. Тогда, подставляя (6) в (5), приходим к дифференциальному уравнению в импульсном представлении:

$$\left\{ (\hat{p}^2 - 2\mu E)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_3^2} \right) + 2(\hat{p}^2 - 2\mu E) \times \right. \\ \left. \times \left(p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + p_3 \frac{\partial}{\partial p_3} + 1 \right) + \frac{4\mu^2 Z^2 e^4}{\hbar^2} \right\} \psi(\mathbf{p}) = 0. \quad (7)$$

Далее, оказывается целесообразным перейти от импульсов на трехмерной гиперплоскости к импульсам на трехмерной гиперсфере в четырехмерном импульсном пространстве. Именно это ключевой момент результата Фока. Данный переход осуществляется, можно сказать, с помощью обратной стереографической проекции. Согласно работе Фока [6], следует взять трехмерную гиперсферу радиуса $y_0 = \sqrt{-\mu E/2}$, касающуюся в начале координат трехмерной гиперплоскости $\{\mathbf{p}\}$, и сопоставить точкам на гиперплоскости точки на гиперсфере, проводя прямые линии из «верхней» точки сферы до пересечения со сферой и с гиперплоскостью (рис. 1). Точки пересечения соответствуют друг другу. В аналитическом виде такое преобразование записывается следующим образом:

$$y_j = \frac{4y_0^2 p_j}{4y_0^2 + p^2}; \quad y_5 = \frac{-4y_0^2 + p^2}{4y_0^2 + p^2}, \quad (8)$$

где индекс j пробегает значения 1, 2, 3. Легко видеть, что имеет место уравнение гиперсферы: $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_5^2 = y_0^2$.

Кроме того, естественно перейти к сферическим координатам α , θ и φ на трехмерной гиперсфере согласно известным формулам:

$$y_1 = y_0 \sin \alpha \sin \theta \cos \varphi; \quad y_2 = y_0 \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi; \\ y_3 = y_0 \sin \alpha \cos \theta \quad (y_5 = y_0 \cos \alpha). \quad (9)$$

Тогда, произведя замену ψ -функции $\psi(\alpha, \theta, \varphi) = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Phi(\alpha, \theta, \varphi)$, приводим (7) к виду

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin^2 \alpha \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 1 + \frac{m^2 Z^2 e^4}{4\hbar^2 y_0^2} \right\} \Phi(\alpha, \theta, \varphi) = 0. \quad (10)$$

Легко убедиться, что это уравнение представляет собой сферическую часть четырехмерного уравнения Лапласа (или аналогичного уравнения

с «массовым» членом)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_5^2} \right) \Psi(y_1, y_2, y_3, y_5) = 0 \quad (11)$$

после разделения переменных, когда Ψ записывается в виде $\Psi = R(y_r) \Phi(\alpha, \theta, \varphi)$. Тогда постоянная разделения Λ_1 связана со слагаемыми в (10) следующим образом:

$$\Lambda_1 = -1 + \frac{m^2 e^4 Z^2}{4 \hbar^2 y_0^2}. \quad (12)$$

Уравнение (10), в свою очередь, допускает разделение переменных на обычные углы θ и φ на двумерной сфере и угол α . Полагая $\Phi(\alpha, \theta, \varphi) = A(\alpha) Y(\theta, \varphi)$, получаем уравнения

$$\left\{ \sin^2 \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \Lambda_1 \sin^2 \alpha - \Lambda_2 \right\} A(\alpha) = 0, \quad (13)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \Lambda_2 \right\} Y(\theta, \varphi) = 0, \quad (14)$$

где Λ_2 — постоянная. Очевидно, что уравнение (14) представляет собой известное уравнение для сферических функций на двумерной сфере. Его собственные значения: $\Lambda_2 = l(l+1)$, где $l=0, 1, \dots$

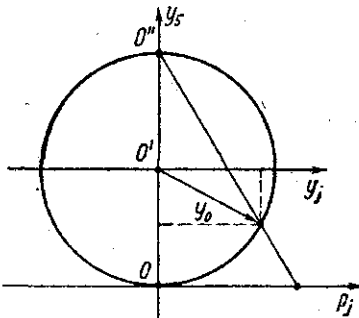


Рис. 1

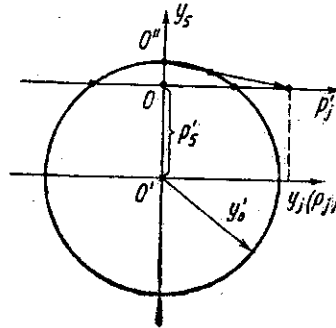


Рис. 2

Решение уравнения (13) также легко найти. Подставляя в него значение Λ_2 и производя замены $z = \cos \alpha$ и $A(z) = (1-z^2)^{-1/4} B(z)$, приводим (13) к присоединенному уравнению Лежандра. Его собственные функции также известны, а собственные значения равны $\Lambda_1 + \frac{3}{4} = L'(L'+1) = \left(L + \frac{1}{2}\right) \left(L + \frac{3}{2}\right)$, т. е. $\Lambda_1 = L(L+2)$, где L — целое число, равное $0, 1, 2, \dots$. Вспомнивая выражение (12) и ранее сделанное отождествление $4y_0^2 = -2\mu E$, находим энергетические уровни атома водорода:

$$\frac{\mu^2 Z^2 e^4}{4 \hbar^2 y_0^2} = (L+1)^2 = n^2 \rightarrow E = -\frac{\mu e^4 Z^2}{2 \hbar^2 n^2}. \quad (15)$$

Таким образом, полученное уравнение (10) в импульсном пространстве обладает $O(4)$ -симметрией, его собственные значения в точности те же, что и для уравнения Шрёдингера в координатном представлении, а радиус гиперболы, использованной для построения сте-

реографической проекции, не постояен, а жестко связан с энергетическими уровнями атома водорода. Расстояние от центра гиперсферы до гиперплоскости $\{p_j\}$ также перемено по построению. Математически полученный результат ясен, однако он пока не получил должной физической интерпретации [8].

3. Обобщение стереографической проекции. Изложенный выше подход к теории атома водорода допускает обобщение, позволяющее осмыслить суть результата с позиций пятимерной теории. Ключевым моментом является отказ от постулированной ранее методики стереографической проекции. Оказывается, совсем необязательно выбирать гиперплоскость касательной к гиперсфере. Аналогичный результат можно получить, если гиперплоскость $\{p_j\}$ сдвинуть выше (или ниже) точки касания, изменив при этом соответствующим образом радиус гиперсферы. Воспользуемся этим и расположим гиперплоскость $\{p_j\}$ выше центра гиперсферы на некоторую величину $p_5' < y_0'$, как указано на рис. 2. Значения координат по горизонтальной оси должны пониматься (как и раньше) как трехмерные компоненты импульсов, а по вертикальной оси — теперь как значения пятой компоненты импульса.

Все изложенное в предыдущем разделе легко переформулировать для новой процедуры построения стереографической проекции, однако сделаем «обратный ход», т. е. будем исходить из $O(4)$ -симметричного уравнения (10) на гиперсфере с заменой последних двух членов в фигурных скобках на $\Lambda_1 = L(L+2)$. Произведем замену $\Phi(\alpha, \theta, \varphi) = \psi(\alpha, \theta, \varphi) / \sin^2(\alpha/2)$ и перейдем к декартовым координатам согласно (9), а затем построим стереографическую проекцию точек гиперсферы на новую гиперплоскость $\{p'_j\}$ согласно рис. 2. Формулы такого преобразования заменяют (8) и имеют вид

$$y_j = \frac{2y'_0(y'_0 - p'_5)}{(y'_0 - p'_5)^2 + p^2} p_j; \quad y_5 = \frac{y'_0[p^2 - (y'_0 - p'_5)^2]}{(y'_0 - p'_5)^2 + p^2}, \quad (16)$$

или обратно

$$p_j = \frac{y'_0 - p'_5}{y'_0 - y_5} y_j,$$

где y_0' — новый радиус гиперсферы ($y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_5^2 = y_0'^2$), p_5' — постоянная величина для каждой стереографической проекции. Тогда вместо (7) получаем уравнение

$$\left\{ [p^2 + (y'_0 - p'_5)^2]^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_3^2} \right) + \right. \\ \left. + 2[p^2 + (y'_0 - p'_5)^2] \left(p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + p_3 \frac{\partial}{\partial p_3} + 1 \right) + \right. \\ \left. + 4(L+1)^2 (y'_0 - p'_5)^2 \right\} \psi(p) = 0. \quad (17)$$

Далее, заменяя написание операторов $i\hbar \partial / \partial p_j$ на x_j и опять пользуясь перестановочными соотношениями (6), приходим к выражению

$$[p^2 + (y'_0 - p'_5)^2] r [p^2 + (y'_0 - p'_5)^2] r = 4(L+1)^2 (y'_0 - p'_5)^2, \\ [p^2 + (y'_0 - p'_5)^2] = \frac{2n(y'_0 - p'_5)}{r}, \quad (18)$$

где опять использовано обозначение $n=L+1$. При переходе от этого соотношения к дифференциальному уравнению в координатном представлении кроме очевидной замены операторов $p_j = i\hbar \partial/\partial x^j$ нужно учесть следующее важное обстоятельство. Волновая функция ψ , вообще говоря, должна рассматриваться с позиций четырехмерного импульсного пространства. Зависимость от четвертой переменной (пятой компоненты) фактически присутствует в виде δ -функции.

При переходе к координатному представлению получаем ранее постулированную зависимость волновой функции $\psi(\mathbf{r}, x^5)$ от x^5 вида (2), где учтено, что $p_5 = \frac{ec}{2\sqrt{k}}$. Соответствующее (18) уравнение после учета зависимости от x^5 приводится к виду

$$\left\{ g^{ik} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{1}{\hbar^2} (y'_0 - p'_5)^2 - \frac{2n}{\hbar^2 r} (y'_0 - p'_5) \right\} \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (19)$$

где g^{ik} — трехмерный метрический тензор ($g^{ik} = (-1, -1, -1)$), y'_0 и p'_5 — c -числа, $\psi(\mathbf{r})$ — часть $\psi(\mathbf{r}, x^5)$, зависящая лишь от трехмерных пространственных координат.

Сравним уравнение (19) с уравнением типа Клейна—Фока в пятимерной теории [2] для центрального кулоновского поля:

$$\left\{ g^{ir} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{1}{\hbar^2} \left(p_5^2 - \tilde{\mu}^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) - \frac{4\sqrt{k} E p_5 A_0}{c \hbar^2} - \frac{4k}{c^4} A_0^2 p_5^2 \right\} \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (20)$$

где $A_i = 0$, $A_0 = Ze/r$, $\tilde{\mu}$ — некая затравочная масса, связанная с наблюдаемой массой μ соотношением $\tilde{\mu} = \sqrt{e^2/(4k) - \tilde{\mu}^2} \equiv \sqrt{p_5^2/c^2 - \tilde{\mu}^2}$. Пренебрежем членом, содержащим A_0^2 . Сравнивая уравнения (19) и (20), находим соответствие:

$$\begin{cases} (y'_0 - p'_5)^2 = p_5^2 - \tilde{\mu}^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} \equiv \mu^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2}, \\ (y'_0 - p'_5) \frac{n}{r} = \frac{2\sqrt{k}}{c^3} A_0 p_5 \rightarrow (y'_0 - p'_5) = \frac{Ze^2 E}{\hbar c^2 n}. \end{cases} \quad (21)$$

Из этих соотношений легко находим энергетические уровни:

$$E = \mu c^2 \left(1 - \frac{\{Z^2 e^4\}}{2\hbar^2 c^2 n^2} + \frac{3}{8} \frac{Z^4 e^8}{\hbar^4 c^4 n^4} + \dots \right), \quad (22)$$

что с учетом энергии покоя μc^2 соответствует нерелятивистской формуле (15) (см. также [9]).

4. Заключение. Сделаем несколько замечаний и выводов.

1. Для получения энергетических уровней атома существенно используется лишь разность параметров стереографической проекции ($y'_0 - p'_5$).

2. Для указанного результата несуществен выбор конкретных значений y'_0 и p'_5 в отдельности. Их выбирать нужно из дополнительных соображений, одним из которых может быть ранее сделанное утверждение о значении импульса $p_5 = ec/(2\sqrt{k})$. Однако при этом возникают две возможности, соответствующие тому, что выбирается в качестве p_5 :

а) $p_5 = y'_0$, тогда радиус гиперсферы $y'_0 = ec/(2\sqrt{k})$ — постоянная величина для всех уровней, а гиперплоскости $\{p_j\}$ смещаются; для каждого энергетического уровня имеется свое значение p'_5 — расстояния от центра до гиперплоскости.

б) $p_5 = p_5'$, тогда расстояние гиперплоскости $\{p_i\}$ от точки O' постоянно, а радиусы гиперсфер y_0' различны для разных энергетических уровней.

3. В обоих вариантах разность $y_0' - p_5' \simeq \frac{Ze^2\mu}{\hbar n} \left(1 - \frac{Z^2e^4}{2\hbar^2c^2n^2}\right)$ — чрезвычайно малая величина по сравнению с радиусом гиперсферы (примерно на 16 порядков меньше).

4. По-видимому, можно предположить, что более первичными являются 0(4)-симметричные отношения, составляющие прообраз обычных импульсов. Имеются четыре отношения между микрочастицами, причем как следствие образования атомов (связанных состояний) между отношениями появляется связь, симметричным образом уменьшающая число независимых до трех. Переход к описанию в терминах макропонятий состоит в развертке стереографическим способом прообраза импульсов на гиперсфере в значения обычных импульсов на трехмерной плоскости.

5. Подобный же переход от более первичного четырехмерия к трехмерию можно усмотреть с позиций пятимерия и при описании свободных частиц в квазиклассическом приближении. Действительно, согласно изложенному в первом разделе волновая функция частицы должна быть пропорциональна величине

$$\psi \sim \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (p_1x^1 + p_2x^2 + p_3x^3 + p_5x^5) \right]. \quad (23)$$

По еще не достаточно осознаным причинам из четырех пространственных компонент остаются лишь три. Хотя в (23) зависимость от всех четырех координат имеет равноправный циклический характер, в конце концов из наложения многих гармоник по трем измерениям происходит развертка циклов до наблюдаемых вещественных величин (компонент, принимающих значения от $-\infty$ до $+\infty$), а по одному измерению этого не происходит.

6. При учете в (20) релятивистских поправок 0(4)-симметрия нарушается. Геометрически это соответствует тому, что гиперсфера превращается в эллипсоид вращения, а аналитически — тому, что появляется зависимость от квантового числа l .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Калуца Т. В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 529. [2] Владимиров Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. [3] Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966, с. 492. [4] Фок В. А. Изв. АН СССР, 1935, 2, с. 169. [5] Фок В. А. Сорена, 1935, 5, с. 3. [6] Фок В. А. Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976, с. 266. [7] Hilteagaas E. A. Zeitschrift für Physik, 1932, В74, N 3, 4, p. 216. [8] Балашов В. В., Долинов В. К. Курс квантовой механики. М.: Изд-во МГУ, 1982, с. 224. [9] Шифф Л. Квантовая механика. М.: ИЛ, 1959, с. 368.

Поступила в редакцию
31.01.83