СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шелковников Н. К., Алявдин Г. И. Океанология, 1982, 22, № 2, с. 196. [2] Wu J. J. Fluid Mech., 1973, 61, N 2, p. 275. [3] Kato H., Phillips O. M. J. Fluid Mech., 1969, 37, N 4, p. 643. [4] Шелковников Н. К. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1976, 17, № 2, с. 219. [5] Удалов Н. П. Полупроводниковые датчики. М.: Энергия, 1965, с. 240. [6] Фельзенбаум А. И. В кн.: Итоги науки. Гидромеханика. 1968. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1970, с. 97. [7] Шелковников Н. К., Контобойцева Н. В., Новочинский С. М. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1980, 21, № 3, с. 53. [8] Baines W. D., Кnарр D. I. Proc. ASCE — J. Hydr. Div., 1965, HY 2, N 3, p. 205. [9] Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкости. М.: Мир, 1977, с. 321.

Поступила в редакцию
19.02.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 528.21/22

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ РЯДА ЛАПЛАСА НА ФИЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПЛАНЕТ

Н. А. Чуйкова

(ГАИШ)

Вопрос о сходимости на физической поверхности планеты разложения ее внешнего потенциала притяжения по сферическим функциям можно решить следующим образом: найти, при каких условиях степенной ряд Лапласа, абсолютно и равномерно сходящийся к потенциалу планеты всюду вне сферы, охватывающей массы планеты,

$$V(r, \varphi, \lambda) = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{r^{n+1}}, \tag{1}$$

где

$$A_n = \int \mu(r', \varphi', \lambda')\, P_n(\cos\gamma)\, r'^{n+2}\, dr'd\sin\varphi' d\lambda',$$

γ — угол, образованный радиус-векторами точек наблюдения (r, φ, λ) и интегрирования (r', φ', λ'), равномерно сходится и когда точка наблюдения находится внутри охватывающей сферы. В этом случае в силу теоремы единственности для аналитических функций этот ряд будет представлять собой потенциал планеты всюду в области вне физической поверхности.

О возможности решения такой задачи говорят два результата, полученные в теории потенциала [1]. 1). Если тело ограничено аналитической поверхностью и имеет плотность, представляющую аналитическую функцию координат, то внешний потенциал может быть аналитически продолжен внутрь тела. Поэтому если такое продолжение возможно вплоть до сферы с радиусом, равным минимальному радиусу поверхности тела, то в силу теоремы единственности разложение внешнего потенциала в степенной ряд (1) будет сходиться и представлять собой потенциал всюду в области вне поверхности тела. 2). Согласно методу выметания, внешний потенциал объемного тела всюду на и вне поверхности тела равен внешнему потенциалу простого слоя, полученного выметанием внутренних масс на поверхность тела. Поэтому если поверхностный слой тела имеет такую структуру, что он может быть получен выметанием масс, расположенных внутри сферы минимального радиуса, то, осуществляя процесс, обратный выметанию, получим тело радиуса $r_{\min}$, потенциал которого, всюду в области вне его поверхности равный внешнему потенциалу исходного тела, может быть разложен в сходящийся всюду при $r \geqslant r_{\min}$ степенной ряд (1).

В теории потенциала известно одно конкретное тело — однородный эллипсоид сжатия, внешний потенциал которого может быть аналитически продолжен вплоть до сферы радиуса $r_{\min} = \sqrt{a^2 - c^2}$, где a, c — полуоси эллипсоида. Попробуем определить другие, более сложные структуры тел, на поверхность которых может быть аналитически продолжен ряд (1). Если повернуть систему координат так, что северный полюс совпадет с точкой наблюдения (r, φ, λ), то ряд Лапласа (1) преобразуется в ряд Лежандра [2]

$$V(r, \sin\varphi_1^0 = 1) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n P_n(\sin\varphi_1^0 = 1)}{r^{n+1}}, \tag{2}$$

где

$$A_n = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r}^{R(\varphi_1)} \mu(r', \varphi_1) P_n(\sin\varphi_1) r'^{n+2} d\sin\varphi_1 dr', \tag{3}$$

$R(\varphi_1)$ — осредненное по новым параллелям уравнение внешней поверхности тела, $\mu(r', \varphi_1)$ — осредненная по новым параллелям плотность тела. Интегрирование ведется по массам рельефа, расположенным выше сферы радиуса r, поскольку только для них возникает вопрос о сходимости ряда (1). Требуется найти, какие условия нужно наложить на функции $R(\varphi_1)$ и $\mu(r', \varphi_1)$, чтобы коэффициенты ряда (2) $A_n^* = A_n/r^{n+1}$ при $n \to \infty$ удовлетворяли какому-либо достаточному признаку сходимости ряда. Рассмотрим два случая.

1) $\mu = \mu_0 = \text{const}$. Интегрируя в (3) по r' и разлагая $(1 + H/r^{n+3})$ в степенной ряд, получим

$$\int_{r'=r}^{r+H} r'^{n+2} dr' = \frac{(r+H)^{n+3} - r^{n+3}}{n+3} = r^{n+3} \sum_{k=1}^{n+3} \frac{(n+2)(n+1)\ldots(n-k+4)}{k!} \left(\frac{H}{r}\right)^k, \tag{4}$$

где $H(\varphi_1)$ — усредненные по параллелям высоты точек физической поверхности относительно сферы радиуса r.

Поскольку ряд (4) равномерно сходится в промежутке $|H/r| < 1$, то его можно проинтегрировать почленно. Подставляя (4) в (3) и интегрируя, получим

$$A_n^* = \frac{A_n}{r^{n+1}} = 2\pi\mu_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r+H)^{n+3} - r^{n+3}}{(n+3) r^{n+1}} P_n(\sin\varphi_1) d\sin\varphi_1 =$$

$$= 2\pi\mu_0 r^2 \sum_{k=1}^{n+3} \frac{(n+2)(n+1)\ldots(n-k+4)}{k!} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{H(\varphi_1)}{r}\right)^k P_n(\sin\varphi_1) d\sin\varphi_1. \tag{5}$$

Если $H(\varphi_1)/r$ представлено в виде разложения в ряд Лежандра, то только в случае абсолютной сходимости этого ряда его можно возводить в любую степень. Для абсолютной сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты его убывали с номером n не медленнее, чем $1/n^{1+s}$, где $s > 0$. Чтобы оценить достаточность этого условия и для сходимости ряда (2), положим вначале, что усредненный по параллелям рельеф представлеятся отдельной гармоникой с отрицательной амплитудой $H_j(\varphi_1) = -H_{j0}P_j(\sin\varphi_1)$. В этом случае точка наблюдения расположена в самой глубокой части поверхности. При $j=0$

$$A_{n0}^* = \frac{2\pi\mu_0}{n+3}\,\frac{(r+H_0)^{n+3}-r^{n+3}}{r^{n+1}}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(\sin\varphi_1)\,d\sin\varphi_1 =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4\pi\mu_0}{3}\,\dfrac{(r+H)^3-r^3}{r} & \text{при } n=0, \\ 0 & \text{при } n\neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Мы видим, что нулевая гармоника рельефа (слой постоянной толщины) вносит свой вклад лишь в нулевую гармонику ряда (2) и, таким образом, не влияет на его сходимость в точках, расположенных ниже слоя. Конечно, поскольку условия теоремы единственности (связность области) не выполняются, ряд с коэффициентами (6) не будет представлять собой потенциал слоя в этих точках. При $j>0$

$$H(\varphi_1) = H_{j0}(1 - P_j(\sin\varphi_1));$$

$$\left(\frac{H(\varphi_1)}{r}\right)^k = \sum_{q=0}^{j\times k} \alpha_q P_q(\sin\varphi_1), \tag{7}$$

где

$$\alpha_q < \sqrt{\frac{2q+1}{2}}\left\|\left(\frac{H_{j0}}{r}(1-P_j)\right)^k\right\| = \sqrt{\frac{2q+1}{2}}\left(\frac{\beta H_{j0}}{r}\right)^k,$$

$\beta=2$ при j нечетном, $\beta\leqslant 1{,}5$ при j четном. Поскольку

$$\int_{-1}^{1} P_q(x)\,P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } q\neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } q=n,\ k\geqslant k_0 = \langle n/j\rangle, \end{cases} \tag{8}$$

где $\langle n/j\rangle$ — минимальное целое число, не меньшее n/j, то, подставляя (7) в (5) и учитывая (8), получим

$$A_{nj}^* \leqslant \frac{2\sqrt{2}\,\pi\mu_0 r^2}{\sqrt{2n+1}} \sum_{k=k_0}^{n+3} \frac{(n+2)\ldots(n-k+4)}{k!}\left(\frac{\beta H_{j0}}{r}\right)^k =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,\pi\mu_0 r^2}{\sqrt{2n+1}}\,\frac{(n+2)\ldots(n-k_0+4)}{k_0!}\left(\frac{\beta H_{j0}}{r}\right)^{k_0} \times$$

$$\times \sum_{k'=0}^{n+3-k_0} \frac{(n-k_0+3)\ldots(n-k_0+4-k')}{(k_0+1)_{k'}}\left(\frac{\beta H_{j0}}{r}\right)^{k'}. \tag{9}$$

Здесь при

$$H_{j0}/r < 1/(\beta j) \tag{10}$$

и при любых n, k_0 сумма по k' ограничена (как сумма абсолютно сходящегося по признаку Даламбера ряда). При этом же условии (10) будет также абсолютно сходиться и ряд (2) с коэффициентами (9): при неограниченном j — как ряд с коэффициентами $\sim n^{-1,5}$, при ограниченном j — по признаку Даламбера. Отметим, что условие (10), или, поскольку здесь $r=R_0-H_{j0}$ (R_0 — средний радиус), условие $H_{j0}/R_0 \leqslant 1/(1+\beta j)$, практически совпадает с полученным раньше другим методом [3].

Если рельеф представлен в виде суммы гармоник

$$R(\varphi_1)=r+\sum_{j=1}^{J_k} H_{j0}(1-P_j(\sin\varphi_1)),$$

где $H_{j0}>0$ для гармоник с отрицательными амплитудами, то доказательство можно вести методом математической индукции. Предположим, что для масс рельефа, ограниченных поверхностью

$$R_{J-1}(\varphi_1)=r+\sum_{j=1}^{J-1} H_{j0}(1-P_j(\sin\varphi_1)),$$

ряд (2) с коэффициентами

$$A_n^*=\frac{2\pi\mu_0}{r^{n+1}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{r}^{R_{J-1}} P_n(\sin\varphi_1)\,r'^{\,n+2}\,d\sin\varphi_1 dr'$$

абсолютно сходится в точке наблюдения $\left(r=R_0-\sum\limits_{j=1}^{J_k} H_{j0},\ \sin\varphi_1=1\right)$.

Для масс рельефа, ограниченных поверхностью

$$R_J=R_{J-1}+H_{J0}(1-P_J(\sin\varphi_1)),$$

коэффициенты ряда (2) можно представить в виде $A_n^*+\Delta A_n^*$, где

$$\Delta A_n^*=\frac{2\pi\mu_0}{r^{n+1}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{R_{J-1}}^{R_J} P_n(\sin\varphi_1)\,r'^{\,n+2}\,d\sin\varphi_1 dr'. \tag{11}$$

Интегрируя в (11) по r' и используя (7) и (8), где

$$\alpha_q\leqslant\sqrt{\frac{2q+1}{2}}\left\|\left(\frac{R_{J-1}}{r}\right)^{n+3}\left(\frac{H_{J0}(1-P_J)}{R_{J-1}}\right)^k\right\|=$$
$$=\sqrt{\frac{2q+1}{2}}\left(\frac{\hat r}{r}\right)^{n+3}\left|\frac{\beta H_{J0}}{\hat r}\right|^k,$$

$\hat r$ — максимальный радиус поверхности $R_{J-1}(\varphi_1)$, $k_0=\langle n/J\rangle$, $n\leqslant J\times k_0$, получим

$$\Delta A_n^*\leqslant\frac{2\sqrt{2}\pi\mu_0 r^2}{\sqrt{2n+1}}\sum_{k=k_0}^{n+3}\frac{(n+2)\ldots(n-k+4)}{k!}\left(\frac{\hat r}{r}\right)^{n+3}\left|\frac{\beta H_{J0}}{\hat r}\right|^k\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\sqrt{2}\pi\mu_0\hat r^3}{\sqrt{2n+1}\,r}\,\frac{(n+2)\ldots(n-k_0+4)}{k_0!}\left(\left(\frac{\hat r}{r}\right)^J\frac{\beta\,|H_{J0}|}{\hat r}\right)^{k_0}\times$$
$$\times\sum_{k'=0}^{n+3-k_0}\frac{(n-k_0+3)\ldots(n-k_0+4-k')}{(k_0+1)_{k'}}\left|\frac{\beta H_{J0}}{\hat r}\right|^{k'}.$$

При условии

$$\frac{|H_{J0}|}{\hat r}<\frac{1}{\beta J}\left(\frac{r}{\hat r}\right)^J \tag{12}$$

ряд с коэффициентами ΔA_n^* абсолютно сходится, поэтому будет абсолютно сходиться и ряд с коэффициентами $A_n^* + \Delta A_n^*$. Поскольку для поверхности, представленной единичной гармоникой, сходимость ряда (2) при условии (10) (которое совпадает с (12) при $\hat{r}=r$) доказана, то добавление к рельефу гармоник, подчиняющихся (12), не меняет сходимости ряда. При $J_k \to \infty$ этот процесс сходится в силу справедливости принципа суперпозиции для гравитационных полей конечных масс.

Численные расчеты, проведенные для моделей рельефа, представленного как отдельной гармоникой, так и конечной суммой гармоник, показали справедливость формул (10) и (12) для предельных амплитуд гармоник рельефа. Для $j=1$ и 2 коэффициенты ряда (2) можно найти в конечном виде, а именно:

$$A_{n1}^* = \frac{2\pi\mu_0 r^2 (n+2)!}{3(2n+1)!!}\left(-\frac{H_{10}}{r}\right)^n\left(1+3\frac{H_{10}}{r}+\frac{3(n+2)}{n+1,5}\left(\frac{H_{10}}{r}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{n+3}{n+1,5}\left(\frac{H_{10}}{r}\right)^3\right) \sim \frac{\pi\mu_0 r^2 n^{1,5}}{3}\left(1+\frac{H_{10}}{r}\right)^3\left(-\frac{H_{10}}{2r}\right)^n;$$

$$A_{2m,2}^* = \frac{2\pi\mu_0 r^2 (m+4)_{m-1}}{(m+0,5)_{m+1}}\left(-\frac{3H_{20}}{2r}\right)^m \sum_{k=0}^{m+3} C_{m+3}^k \frac{(m+1)_k}{(2m+1,5)_k}\left(\frac{3}{2}\frac{H_{20}}{r}\right)^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m^2}\left(-\frac{3}{2}\frac{H_{20}}{r}\left(1+\frac{H_{20}}{r}\right)\right)^m,$$

исследование которых показывает конечность $\sum_{n=0}^{\infty} A_n^*$ при условии (10).

Таким образом, если в системе координат с северным полюсом в точке наблюдения осредненный по параллелям рельеф представляет собой ряд гармоник с амплитудами, убывающими по закону (12), то разложение для потенциала (2) сходится абсолютно (и равномерно) всюду в области на и вне поверхности тела. Поскольку при повороте системы координат нормированная дисперсия не меняется [4], то условие (12) равносильно следующему условию для нормированной (по Каула) степенной дисперсии:

$$\bar{D}_J < \frac{1+\hat{H}/R}{\beta J\sqrt{2J+1}}\left(\frac{R-\Delta}{R+\hat{H}}\right)^J, \tag{13}$$

где $\hat{H}$ — максимальная высота рельефа относительно средней сферы, Δ — максимальная глубина.

2) $\mu \neq \text{const}$, тогда в (3) можно написать

$$\int_r^{R(\varphi)} \mu(r', \varphi_1) r'^{n+2} dr' = \bar{\mu}(\varphi_1)\int_r^{r+H} r'^{n+2} dr' = \bar{\mu}(\varphi_1)\frac{r^{n+3}}{n+3}\left[\left(1+\frac{H_{\max}}{r}\right)^{n+3}-1\right],$$

где $\bar{\mu}(\varphi_1)$ — некоторое значение плотности вдоль отрезка $r \div r+H_{\max}$ (для сохранения непрерывности $\mu(\varphi_1)$ считаем, что в приграничном слое плотность изменяется постепенно от $\mu_{\text{пов}}$ к $\mu=0$).

Предположим, что

$$\bar{\mu}(\varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k P_k(\sin\varphi_1). \tag{14}$$

Поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k P_k(\sin\varphi_1)\,P_n(\sin\varphi_1)\,d\sin\varphi_1=\frac{2\mu_n}{2n+1},$$

то

$$A_n^*=\frac{A_n}{r^{n+1}}=\frac{4\pi\mu_n r^2}{(n+3)(2n+1)}\left[\left(1+\frac{H_{\max}}{r}\right)^{n+3}-1\right]. \qquad (15)$$

Чтобы ряд (2) с коэффициентами (15) сходился, необходимо и достаточно выполнение условия

$$|\mu_n|<\frac{\mu_0 n}{\left(1+\frac{H_{\max}}{r}\right)^{n+3}-1}.$$

Поскольку радиус сходимости ряда (14) при таком условии равен $\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mu_n}}=1+\frac{H_{\max}}{r}$, то это требование равносильно тому, что плотность поверхностных масс в слое $r\div r+H_{\max}$ должна представляться аналитической функцией координат.

Таким образом, на поверхностях планет, нормированная степенная дисперсия высот рельефа которых подчиняется условию (13), а плотность поверхностных масс является аналитической функцией координат, потенциал можно представлять равномерно сходящимся рядом (1). Известные разложения рельефа планет земной группы подчиняются данному условию. Нарушения же аналитичности плотности практически могут сказываться лишь при нахождении их вблизи точки наблюдения. Поэтому отличие наблюдений, производимых непосредственно на поверхностях планет, от вычисленных на основе (1) позволит найти распределение особенностей функций поверхностной плотности.

Данное доказательство является хорошим свидетельством того, что интегрирование расходящегося ряда может привести к его сходимости. Так, множитель в подынтегральном выражении для коэффициентов A_n, а именно $[(r+H)^{n+3}-r^{n+3}]/[(n+3)r^{n+1}]$, начинает возрастать при $n\geqslant(r_{\min}/H_{\max})$, что для Земли соответствует $n\gg 300$. Этот факт может привести к ошибочному выводу о том, что и ряд для потенциала при $n\gg 300$ начинает расходиться (хотя даже классический пример эллипсоида противоречит обязательности такого вывода). Однако, как было показано выше, при умножении этого множителя на $P_n(\sin\varphi_1)$ и интегрировании его по всей поверхности планеты ряд становится сходящимся не только для эллипсоида, но и для более широкого класса тел, рельеф и плотность которых представляются аналитическими функциями. Причем поскольку используемый нами метод доказательства свидетельствует (в силу признака Вейерштрасса) о равномерной сходимости ряда аналитических функций A_n/r^{n+1} к $V(r,\varphi,\lambda)$ всюду вне поверхности тела, то в этой же области будут равномерно сходиться и ряды производных этих функций к соответствующим производным потенциала.

Можно показать также, что выполнение [13] достаточно и для того, чтобы сумма бесконечного ряда поправочных членов, вводимых в [5] для достижения сходимости ряда (2) на физической поверхности, сводилась к нулю. Например, полученный в [5] поправочный ряд для Δg

$$S(r, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^3 \iint\limits_{\omega_h} \mu \left(\frac{h_1 - h}{R}\right)^2 P_n(\cos\omega)\, d\omega,$$

где h_1, h — высоты точек интегрирования и наблюдения над сферой радиуса R, ω — угол между радиус-векторами этих точек, μ — плотность, можно преобразовать, используя формулы

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}(2n+1)\left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right),$$

$$(n^2 + n) P_n^m(\sin\varphi) = m^2 \sec^2\varphi\, P_n^m(\sin\varphi) + \\ + \operatorname{tg}\varphi \frac{dP_n^m(\sin\varphi)}{d\varphi} - \frac{d^2 P_n^m(\sin\varphi)}{d\varphi^2},$$

к следующему виду:

$$S(r, \varphi, \lambda) = \frac{1}{4} F(r, \varphi, \lambda) + \frac{1}{2} \sec^2\varphi \frac{d^2 F(r, \varphi, \lambda)}{d\lambda^2} + \\ + \operatorname{tg}\varphi \frac{dF(r, \varphi, \lambda)}{d\varphi} - \frac{d^2 F(r, \varphi, \lambda)}{d\varphi^2},$$

где функция $F = \mu[(h_1 - h)/R]^2$ и ее производные всюду на физической поверхности (т. е. при $h_1 = h$, $\varphi_1 = \varphi$, $\lambda_1 = \lambda$) равны нулю, следовательно, и $S(r, \varphi, \lambda) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. М.—Л., 1946. [2] Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. [3] Чуйкова Н. А. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1980, № 4, с. 54. [4] Чуйкова Н. А. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1983, 24, № 6, с. 75. [5] Петровская М. С. Бюл. ИТА, 1980, 14, № 9(162), с. 557.

Поступила в редакцию
03.03.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 53.12.1

МЕТОД КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

Ю. Г. Павленко

(кафедра теоретической физики)

Задача рассеяния является одной из основных проблем квантовой механики. Прямой метод решения [1] состоит в исследовании асимптотического поведения решения волнового уравнения и определении фаз δ_l рассеяния. Для произвольных потенциалов решение задачи может быть получено лишь на основе приближенных методов. В последние годы получили новое развитие вариационные методы, метод сепарабелизации [2], дисперсионные соотношения для исследования аналитических свойств амплитуд [3], эйкональное приближение, метод фазовых функций [4, 5] и др.