для Δg

$$S(r, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^3 \iint\limits_{\omega_h} \mu \left(\frac{h_1 - h}{R}\right)^2 P_n(\cos\omega)\, d\omega,$$

где h_1, h — высоты точек интегрирования и наблюдения над сферой радиуса R, ω — угол между радиус-векторами этих точек, μ — плотность, можно преобразовать, используя формулы

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}(2n + 1)\left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right),$$

$$(n^2 + n) P_n^m(\sin\varphi) = m^2 \sec^2\varphi\, P_n^m(\sin\varphi) + $$
$$+ \operatorname{tg}\varphi \frac{dP_n^m(\sin\varphi)}{d\varphi} - \frac{d^2 P_n^m(\sin\varphi)}{d\varphi^2},$$

к следующему виду:

$$S(r, \varphi, \lambda) = \frac{1}{4} F(r, \varphi, \lambda) + \frac{1}{2} \sec^2\varphi \frac{d^2 F(r, \varphi, \lambda)}{d\lambda^2} +$$
$$+ \operatorname{tg}\varphi \frac{dF(r, \varphi, \lambda)}{d\varphi} - \frac{d^2 F(r, \varphi, \lambda)}{d\varphi^2},$$

где функция $F = \mu[(h_1 - h)/R]^2$ и ее производные всюду на физической поверхности (т. е. при $h_1 = h$, $\varphi_1 = \varphi$, $\lambda_1 = \lambda$) равны нулю, следовательно, и $S(r, \varphi, \lambda) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. М.—Л., 1946. [2] Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. [3] Чуйкова Н. А. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1980, № 4, с. 54. [4] Чуйкова Н. А. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1983, 24, № 6, с. 75. [5] Петровская М. С. Бюл. ИТА, 1980, 14, № 9(162), с. 557.

Поступила в редакцию
03.03.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 53.12.1

МЕТОД КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

Ю. Г. Павленко

(кафедра теоретической физики)

Задача рассеяния является одной из основных проблем квантовой механики. Прямой метод решения [1] состоит в исследовании асимптотического поведения решения волнового уравнения и определении фаз δ_l рассеяния. Для произвольных потенциалов решение задачи может быть получено лишь на основе приближенных методов. В последние годы получили новое развитие вариационные методы, метод сепарабелизации [2], дисперсионные соотношения для исследования аналитических свойств амплитуд [3], эйкональное приближение, метод фазовых функций [4, 5] и др.

В настоящей работе для решения задачи рассеяния и других проблем квантовой механики используется канонический формализм первого порядка. Теория канонических преобразований (КП), лежащая в основе гамильтонова подхода, позволяет развить несколько методов интегрирования, выходящих за рамки стандартной теории возмущений [6]. При этом весьма существенно для численного счета, что теория позволяет получить алгоритм построения высших приближений.

1. **Гамильтонова форма метода фазовых функций.** Рассмотрим рассеяние скалярных частиц, энергия взаимодействия которых зависит от относительного расстояния. Замена $R=r^{-1}q$, где $R(r)$ — радиальная часть волновой функции, приводит к уравнению [1]

$$\frac{d^2q}{dr^2}+Q(r,l)q=0,\ Q=k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}-V(r). \tag{1}$$

Граничные условия:

$$q \xrightarrow[r\to 0]{} r^{l+1},\ q \xrightarrow[r\to\infty]{} \sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}+\delta_l\right).$$

Для того чтобы представить (1) в гамильтоновой форме, введем фазовое пространство с координатами $z\equiv(q,\ p=dq/dr)$ и фундаментальные скобки Пуассона $[q,p]=1$. Тогда (1) эквивалентно уравнениям первого порядка [6]

$$\frac{dq}{dr}=[q,H],\ \frac{dp}{dr}=[p,H]. \tag{2}$$

Гамильтониан

$$H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}Qq^2 \tag{3}$$

соответствует в терминах механики осциллятору с переменной частотой.

Представим (3) в виде $H=H_0+\Delta H$, где H_0 — гамильтониан свободного движения:

$$H_0=\frac{1}{2}p^2+\left(k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\frac{q^2}{2},\ \Delta H=-\frac{1}{2}Vq^2.$$

Найдем теперь решение уравнений (2), порождаемых гамильтонианом H_0:

$$q=k^{-1/2}(-nq_1+jp_1),\ p=k^{1/2}(-n'q_1+j'p_1). \tag{4}$$

Здесь $n\equiv n_l(kr)$, $j\equiv j_l(kr)$ — сферические функции Риккати — Бесселя [5], штрих обозначает дифференцирование по аргументу. Соотношение (4) определяет КП к новым переменным q_1, p_1, задаваемое производящей функцией

$$F_2(q,p_1,r)=-\frac{1}{2n}(n'q^2+2qp_1-jp_1^2),$$

поскольку старые и новые переменные связаны формулами преобразования [7]

$$p=\frac{\partial F_2}{\partial q},\ q_1=\frac{\partial F_2}{\partial p_1}. \tag{5}$$

Согласно теории КП [7], новый гамильтониан записывается в виде

$$H_1(q_1,p_1,r)=-\frac{1}{2k}V(r)(-nq_1+jp_1)^2.$$

Канонические уравнения совпадают с уравнениями первого порядка в методе фазовых функций [4, 5]:

$$\frac{dq_1}{dr} = [q_1, H_1] = -\frac{V}{k}(-nq_1 + jp_1)\, j,$$

$$\frac{dp_1}{dr} = [p_1, H_1] = -\frac{V}{k}(-nq_1 + jp_1)\, n.$$

Из граничных условий следует, что $q_1(0) = 0$, $p_1(0) = 1$, $q_1 p_1^{-1} \xrightarrow[r\to\infty]{} \operatorname{tg}\delta_l$. В ряде случаев удобно использовать уравнения относительно переменной $\operatorname{tg}\delta_l(r)$, совершая КП $z_1 \to z_2$, порождаемое производящей функцией

$$F_2(q_1, p_2) = q_1\sqrt{2p_2}.$$

Используя соотношение, аналогичное (5), получим замену $q_2 = q_1 p_1^{-1}$, $p_2 = p_1/2$ и новый гамильтониан

$$H_2(q_2, p_2, r) = -\frac{V}{k}(-nq_2 + j)^2\, p_2.$$

Первое из уравнений движения

$$\frac{dq_2}{dr} = [q_2, H_2] = -\frac{V}{k}(-nq_2 + j)^2$$

является уравнением Риккати и интегрируется независимо от второго

$$\frac{dp_2}{dr} = [p_2, H_2] = -\frac{2V}{k}(-nq_2 + j)\, np_2.$$

Подставляя в формулу (5) работы [6] $A = q_2$, $\varepsilon R = H_2$, найдем решение $q_2(r)$ в виде ряда теории возмущений:

$$q_2(r) = q_2(0) + \int_0^r [q_2(0), H_2(q_2(0), p_2(0), r_1)]\, dr_1 + \ldots$$

Поскольку $q_2(0) = 0$, то, переходя к пределу $r \to \infty$, получим

$$\operatorname{tg}\delta_l = -(1/k)\int_0^\infty V(r)\, j_l^2(kr)\, dr + \ldots$$

Найдем теперь основные уравнения в методе фазовых функций [4, 5]. С этой целью совершим каноническое преобразование $z_1 \to z_3$, используя производящую функцию

$$F_1(q_1, q_3) = \frac{1}{2} q_1^2 \operatorname{ctg} q_3.$$

Старые и новые переменные связаны соотношениями [7]

$$p_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_1}, \quad p_3 = -\frac{\partial F_1}{\partial q_3}, \tag{6}$$

из которых находим

$$q_1 = \sqrt{2p_3}\sin q_3, \quad p_1 = \sqrt{2p_3}\cos q_3,$$

$$H_3 = -\frac{V}{k}(-n\sin q_3 + j\cos q_3)^2\, p_3.$$

Канонические уравнения имеют вид

$$\frac{dq_3}{dr} = -\frac{V}{k}(-n\sin q_3 + j\cos q_3)^2,$$

$$\frac{dp_3}{dr} = \frac{2V}{k} p_3 \left[nj\cos 2q_3 + \frac{1}{2}(j^2 - n^2)\sin 2q_3 \right].$$

Очевидно, $\lim\limits_{r\to\infty} q_3 = \delta_l$. В терминах механики p_3, q_3 являются переменными действие — угол [7].

Особый интерес представляет преобразование

$$q_1 = \sqrt{p_4}(1 + iq_4), \quad p_1 = -i\sqrt{p_4}(1 - iq_4), \tag{7}$$

которое приводит к замене $q = \sqrt{p_4}(h^{(2)} + ih^{(1)}q_4)$, где $h^{(n)} \equiv h_l^{(n)}$ (kr) — сферические функции Ханкеля.

Асимптотическое поведение координаты $q_4 = i\dfrac{1 + iq_2}{1 - iq_2}$ связано с S-матрицей соотношением $q_4 \xrightarrow[r\to\infty]{} i\exp(2i\delta_l)$. В новых переменных гамильтониан

$$H_4 = -\frac{V}{2k}(h^{(2)} + ih^{(1)}q_4)^2 p_4.$$

Основным преимуществом приведенных выше канонических уравнений является то, что они могут быть проинтегрированы на основе методов теории канонических преобразований [6].

2. **Метод ВКБ в канонических переменных.** Перейдем, согласно [1], к функции $u = qr^{-1/2}$ и аргументу $x = \ln kr$. Система уравнений для u и u_x становится гамильтоновой, если ввести фазовое пространство $(u,\ p = u_x)$ и гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}R(x)u^2; \quad R = R_0 + R_1,$$

$$R_0 = e^{2x} - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2, \quad R_1 = -e^{2x}\frac{V(x)}{k^2}.$$

Произведем теперь КП u, $p \to u_1$, p_1, порождаемое производящей функцией

$$F_1(u, u_1, x) = \frac{1}{2}R_0^{1/2}u^2 \operatorname{ctg}\varphi, \quad \varphi = u_1 + \int\limits_{x_0}^{x} R_0^{1/2}dx,$$

где x_0 — корень уравнения $R_0(x) = 0$. Из соотношений, аналогичных (6), находим

$$u = \sqrt{2p_1}\,R_0^{-1/4}\sin\left(\int\limits_{x_0}^{x} R_0^{1/2}dx + u_1\right).$$

Новый гамильтониан

$$H_1 = R_1 R_0^{-1/2} p_1 \sin^2\varphi + \frac{1}{4}R_{0x}R_0^{-1}\sin 2\varphi.$$

Для определения зависимости $u_1(x)$, $p_1(x)$ воспользуемся методом усреднения [6]. В первом приближении находим

$$u_1(x) = u_1(x_0) + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} R_1 R_0^{-1/2}dx + \ldots.$$

Поскольку $u_1(x_0)=\pi/4$, $\varphi(\infty)=kr-l\pi/2+\delta_l$, то

$$\delta_l = -\int\limits_r^\infty \frac{m}{\hbar^2}\frac{\Pi(r)\,dr}{\sqrt{k^2-(l+1/2)^2/r^2}}+\ldots,$$

где $\Pi(r)$ — потенциальная энергия взаимодействия.

3. **Стационарное уравнение Дирака в канонических переменных.** Рассмотрим движение электрона в центрально-симметричном поле. После отделения спиновой и угловой частей получим систему уравнений для радиальных функций вида [1, 3—5]

$$\frac{df}{dx}+A(x)f-C(x)g=0,\ \frac{dg}{dx}-A(x)g+B(x)f=0. \tag{8}$$

Система уравнений (8) является гамильтоновой. Гамильтониан

$$H=\frac{1}{2}(Cp^2-2Aqp+Bq^2),$$

где координата $q=f$, а импульс $p=g$. Заметим, что введение канонических переменных упрощает анализ различных моделей удержания кварков [8].

Задача многоканального потенциального рассеяния [3, 5] также может быть представлена в гамильтоновой форме, причем гамильтониан соответствует в терминах механики системе взаимодействующих осцилляторов.

4. **Нестационарная теория потенциального рассеяния.** В большинстве работ [1, 3—5] задача потенциального рассеяния исследуется в стационарной теории. Однако нестационарная форма теории в терминах канонических переменных обладает существенными преимуществами. В частности, оказывается возможным получить алгоритм нахождения спектра энергий, собственных функций, матричных элементов [6]. Представим энергию взаимодействия в виде $U=U_0(x)+\Pi(x,t)$ и предположим, что собственные функции $\Phi_n^{(0)}(x)$ и собственные значения E^0_n невозмущенной задачи известны. Будем искать решение в виде

$$\psi(x,t)=\sum_{(n)}a_n(t)\,\Phi_n^{(0)}(x)\,e^{-iE_n^{(0)}t}. \tag{9}$$

Здесь (n) обозначает суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным собственным значениям оператора $-\frac{1}{2m}\Delta+U_0$.

Подставляя (9) в функционал, приводящий к уравнению Шредингера, и интегрируя, получим новый функционал [6]

$$S=\int L\,dt,$$

$$L=-(i/2)\sum_{(n)}(\dot a_n^* a_n-a_n^*\dot a_n)+H,$$

$$H=\sum_{(n'n)}\Pi_{n'n}(t)\,a_{n'}^*a_n\exp(i\omega_{n'n}t),$$

где $\Pi_{n'n}$ — матричный элемент оператора Π, $\omega_{n'n}=E_{n'}^{(0)}-E_n^{(0)}$. Нетрудно убедиться, что уравнения Лагранжа—Эйлера по переменным a_n^*, a_n принимают вид уравнений Гамильтона, где $a_n(ia_n^*)$ — координаты (импульсы). Развитый в работе [6] метод интегрирования канонических систем позволяет найти алгоритм вычисления спектра и произвольную функцию матричных элементов.

Рассмотрим в качестве примера одномерную задачу рассеяния. Пусть потенциальная энергия является функцией z-координаты. Полагая $U_0(x)=0$, выберем в качестве нулевого приближения свободное движение частицы. Тогда величины a_n являются коэффициентами разложения (9) в интеграл Фурье. Если в начальном состоянии $a_k(t_0)=\delta(k-k_0)$, то, подставляя в формулу (5) работы [6] $A=a_k$, $\varepsilon R'=H$ и переходя к пределам $t\to\infty$, $t_0\to-\infty$, получим

$$a_k(\infty)=\delta(k-k_0)-\frac{im}{|k_0|}\delta(|k|-|k_0|)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(z)\exp[-i(k-k_0)z]\,dz+\ldots \tag{10}$$

Полагая $k=k_0$, найдем коэффициент прозрачности в виде ряда

$$t=1-\frac{im}{|k_0|}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(z)\,dz+\ldots \tag{11}$$

Если в (10) выбрать $k=-k_0$, то получим коэффициент отражения

$$r=-\frac{im}{|k_0|}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(z)\,e^{2ik_0z}\,dz+\ldots \tag{12}$$

Полученные ряды соответствуют стандартной теории возмущения и сходятся весьма медленно, так как содержат квазисекулярные слагаемые. Более того, разложения (11), (12) неприменимы для периодических потенциалов. В обоих случаях для получения решения, обладающего ускоренной сходимостью, можно использовать метод интегрирования, основанный на принципе усреднения [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч. Квантовая механика. М.: Наука, 1979. [2] Зубарев А. Л. Вариационный принцип Швингера в квантовой механике. М.: Энергоиздат, 1981. [3] Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. [4] Бабиков В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1968. [5] Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. М.: Мир, 1972, с. 292. [6] Павленко Ю. Г. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1982, 23, № 2, с. 61. [7] Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. [8] Филиппов А. Т. В кн.: Физ. элемент. частиц и атом. ядра, 1980, т. 11, № 3, с. 735.

Поступила в редакцию
14.03.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 535.36.01

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПО СТЕРЕОПАРЕ ПОВЕРХНОСТИ, ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОТОРОЙ БЛИЗКИ К ЛАМБЕРТОВЫМ

А. Л. Анциферов, Ю. П. Пытьев

(кафедра математики)

Задача автоматического восстановления рельефа местности по фотоизображению представляет собой большой практический интерес в связи с необходимостью обработки огромного количества материа-