

Рассмотрим в качестве примера одномерную задачу рассеяния. Пусть потенциальная энергия является функцией z -координаты. Полагая $U_0(x)=0$, выберем в качестве нулевого приближения свободное движение частицы. Тогда величины a_n являясь коэффициентами разложения (9) в интеграл Фурье. Если в начальном состоянии $a_k(t_0) = \delta(k - k_0)$, то, подставляя в формулу (5) работы [6] $A = a_k$, $\varepsilon R' = H$ и переходя к пределам $t \rightarrow \infty$, $t_0 \rightarrow -\infty$, получим

$$a_k(\infty) = \delta(k - k_0) - \frac{im}{|k_0|} \delta(|k| - |k_0|) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(z) \exp[-i(k - k_0)z] dz + \dots \quad (10)$$

Полагая $k = k_0$, найдем коэффициент прозрачности в виде ряда

$$t = 1 - \frac{im}{|k_0|} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(z) dz + \dots \quad (11)$$

Если в (10) выбрать $k = -k_0$, то получим коэффициент отражения

$$r = -\frac{im}{|k_0|} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(z) e^{2ik_0z} dz + \dots \quad (12)$$

Полученные ряды соответствуют стандартной теории возмущения и сходятся весьма медленно, так как содержат квазисеккулярные слагаемые. Более того, разложения (11), (12) неприменимы для периодических потенциалов. В обоих случаях для получения решения, обладающего ускоренной сходимостью, можно использовать метод интегрирования, основанный на принципе усреднения [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч. Квантовая механика. М.: Наука, 1979. [2] Зубарев А. Л. Вариационный принцип Швингера в квантовой механике. М.: Энергоиздат, 1981. [3] Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. [4] Бабиков В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1968. [5] Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. М.: Мир, 1972, с. 292. [6] Павленко Ю. Г. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1982, 23, № 2, с. 61. [7] Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. [8] Филиппов А. Т. В кн.: Физ. элемент. частиц и атом. ядра, 1980, т. 11, № 3, с. 735.

Поступила в редакцию
14.03.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 535.36.01

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПО СТЕРЕОПАРЕ ПОВЕРХНОСТИ, ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОТОРОЙ БЛИЗКИ К ЛАМБЕРТОВЫМ

А. Л. Анциферов, Ю. П. Пытьев

(кафедра математики)

Задача автоматического восстановления рельефа местности по фотоизображению представляет собой большой практический интерес в связи с необходимостью обработки огромного количества материаль-

ла, поступающего со спутников и самолетов. Обработка фотографий производится, в частности, в целях георазведки.

Для восстановления рельефа местности можно использовать одну фотографию [1], стереопару [2] и набор фотографий [3].

Рассмотрим более подробно проблему восстановления рельефа местности по стереопаре, т. е. по двум фотографиям одной местности, полученным при съемке из разных точек. Предположим, что тела на местности имеют поверхности, по своим оптическим свойствам близкие к ламбертовым. Пусть также $d/R \ll 1$, где d — расстояние между объективами, а R — расстояние от объектива до сфотографированной местности.

Перейдем от рассмотрения объемной задачи восстановления рельефа местности к исследованию серии плоских задач. Для этого проведем плоскость через объективы фотоаппаратов и будем исследовать проблему восстановления профиля местности, т. е. исследуем возможность восстановления кривой, полученной при пересечении указанной плоскости и рельефа.

Введем некоторые понятия. Плоскость с заданными центрами O и O_1 полярных систем координат (ρ, φ) и (ρ', φ') назовем оптической системой (ОС).

Пусть некоторая кривая γ в ОС может быть задана с помощью однозначных непрерывных функций как в системе с центром в точке O ($\rho = \rho(\varphi)$, $0 < \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 < \pi$), так и в системе с центром в точке O_1 ($\rho' = \rho'(\varphi')$, $0 < \varphi'_1 \leq \varphi' \leq \varphi'_2 < \pi$). Если кривая γ целиком лежит в пределах вертикальных углов, образованных прямыми OM и O_1M (точка $M \in \gamma$) и не содержащих отрезок OO_1 , то назовем ее односторонней.

Заметим, что если кривая γ удовлетворяет определению односторонности для некоторой фиксированной точки M , то она удовлетворяет ему и для любой другой точки $N \in \gamma$.

Назовем светимостью функцию, заданную на односторонней кривой γ в ОС. Она может быть задана, например, как функция $G(s)$ длины кривой или в виде $I(\rho(\varphi), \varphi)$, где функция $\rho(\varphi)$ определяет кривую γ в системе координат с центром в точке O .

Изображением в точке O (или O_1) светящейся кривой назовем функцию $u(\varphi) = I(\rho(\varphi), \varphi)$ (или $u_1(\varphi') = I_1(\rho'(\varphi'), \varphi')$).

В рамках введенных понятий справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть функции $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$ такие, что существуют постоянные $\varphi_1, \varphi_2, \varphi'_1, \varphi'_2$, для которых справедливы условия:

- 1) $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$, $0 < \varphi'_1 < \varphi'_2 < \pi$;
- 2) $u(\varphi_1) = u_1(\varphi'_1)$, $u(\varphi_2) = u_1(\varphi'_2)$;
- 3) при любом $\varphi_* \in [\varphi_1, \varphi_2] \cap [\varphi'_1, \varphi'_2]$ $u(\varphi_*) \neq u_1(\varphi_*)$;

4) функции $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$ непрерывны и одновременно либо строго возрастают, либо строго убывают при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $\varphi' \in [\varphi'_1, \varphi'_2]$.

Тогда существует единственная светящаяся односторонняя кривая γ , изображениями которой являются $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$ ($\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $\varphi' \in [\varphi'_1, \varphi'_2]$).

Теорема 1. Пусть значения непрерывных функций $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$ ($0 < \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 < \pi$, $0 < \varphi'_1 \leq \varphi' \leq \varphi'_2 < \pi$) совпадают в точках, где они достигают своих локальных максимумов и минимумов, причем совпадают в порядке их следования в направлении возрастания аргумента; пусть также $u(\varphi_*) \neq u_1(\varphi_*)$ при $\varphi_* \in [\varphi_1, \varphi_2] \cap [\varphi'_1, \varphi'_2]$. Тогда существует единственная односторонняя светящаяся кривая γ , изображениями которой являются $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$.

Сформулированная теорема позволяет выделять на фотографиях области, где сфотографированы односторонние, а значит и непрерывные, поверхности. Она также дает возможность идентифицировать те точки на фотографиях, которые являются изображениями одной точки рельефа.

Рассмотрим теперь следующую нелапбертову модель формирования изображения:

$$u(\varphi) = I(\rho(\varphi), \varphi) \xi((l, n)).$$

Здесь индикатриса рассеяния ξ рассматривается как функция скалярного произведения векторов n и l , n — нормаль к профилю, а l — единичный вектор направления на объектив.

Для двух нелапбертовых изображений одного профиля имеем систему

$$I(\rho(\varphi), \varphi) \xi((l, n)) = u(\varphi), \quad I_1(\rho'(\varphi'), \varphi') \xi((l_1, n_1)) = u_1(\varphi').$$

Предположим, что $I_1 \neq 0$, и поделим первое уравнение на второе:

$$\frac{\xi((l, n))}{\xi((l_1, n_1))} = \frac{u(\varphi)}{u_1(\varphi')}. \quad (1)$$

Здесь мы учли, что значения функций I_1 и I для одной точки профиля совпадают.

Уравнение (1) — это, вообще говоря, дифференциальное уравнение первого порядка, поскольку нормали n и n_1 выражаются через производные $d\rho/d\varphi$ и $d\rho'/d\varphi'$. Добавим к уравнению (1) начальные данные $\rho(\varphi_0) = \rho_0$ и уравнения связи $\rho' = \rho'(\rho, \varphi)$, $\varphi' = \varphi'(\rho, \varphi)$. Уравнения связи позволяют пересчитывать координаты из полярной системы с центром в точке O в координаты системы с центром в точке O_1 .

Исследуем задачу Коши

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{\xi((l, n))}{\xi((l_1, n_1))} = \frac{u(\varphi)}{u_1(\varphi')}, \\ \rho(\varphi_0) = \rho_0, \\ \rho' = \rho'(\rho, \varphi), \quad \varphi' = \varphi'(\rho, \varphi). \end{cases}$$

Предположим, что функция ξ допускает разложение вида

$$\xi((l, n)) = 1 + \delta(l, n) + o(\delta), \quad (2)$$

где $\delta \sim d/R \ll 1$ — параметр, характеризующий степень отличия оптических свойств поверхности от ламбертовой.

Оставим в уравнении (1) члены не выше первого порядка малости, тогда задача (A) примет вид

$$(B) \quad \begin{cases} \dot{\rho} = \frac{f}{\sqrt{1 - f^2}}, \\ \rho(\varphi_0) = \rho_0, \\ \rho' = \rho'(\rho, \varphi), \\ \varphi' = \varphi'(\rho, \varphi), \end{cases}$$

где $\rho = d\rho/d\varphi$, $f(\rho, \varphi) = [u_1(\varphi') - u(\varphi)]/\delta$.

Поведение решения $\rho_{\delta B}(\varphi)$ задачи (B) определяется леммой 2.

Лемма 2. Пусть $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$ удовлетворяют условиям леммы 1 и строго возрастают. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|\rho_{\delta B}(\varphi) - \bar{\rho}(\varphi)| < \varepsilon$ при $\varphi \in [\varphi_1 + \eta_1, \varphi_2 + \eta_2]$, если $|\rho_0 - \bar{\rho}(\varphi_0)| < \varepsilon$ при $\varphi_0 \in [\varphi_1 + \eta_1, \varphi_2 + \eta_2]$, где $\bar{\rho}(\varphi)$ — функция, задающая одностороннюю кривую, существование которой следует из леммы 1.

Решение задачи (А) с индикатрисой ξ , допускающей разложение типа (2), для функций $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$, удовлетворяющих условиям леммы 2, может быть сделано при выборе достаточно малого параметра δ сколь угодно близким к решению $\rho_{\text{ос}}(\varphi)$ задачи (В). А это, в свою очередь, с учетом результата леммы 2 означает, что неламбертова поверхность может быть хорошо приближена ламбертовой в случае малости отклонения свойств поверхности от ламбертовой в смысле (2). Иными словами, решение задачи (А) для функций $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$, удовлетворяющих условиям леммы 2, является устойчивым по параметру δ .

Утверждение, аналогичное лемме 2, имеет место и для убывающих функций $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$, если в первом уравнении системы (В) f заменить на $-f$.

Заменим первое уравнение системы (В) на

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \begin{cases} \frac{f}{\sqrt{1-f^2}}, & \text{если } u(\varphi) \text{ и } u_1(\varphi') \text{ возрастают,} \\ -\frac{|f|}{\sqrt{1-f^2}}, & \text{если } u(\varphi) \text{ и } u_1(\varphi') \text{ убывают,} \\ 0, & \text{если } u(\varphi) \text{ и } u_1(\varphi') \text{ имеют разный характер монотонности.} \end{cases}$$

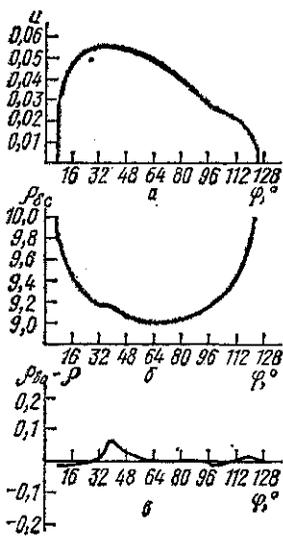
Пусть $\rho_{\text{ос}}(\varphi)$ есть решение модифицированной таким образом задачи Коши (В), за исключением, быть может, точек φ_* , в которых значение производной $(\ln \rho)'$ терпит скачок от приписанного ему значения ноль до $\pm f/\sqrt{1-f^2}$. В этих точках и только в них возможно, что $1-f^2 \leq 0$. Если это так, то $\rho_{\text{ос}}$ в точке φ_* увеличим, если $kf > 0$, или уменьшим, если $kf < 0$, пока значение выражения $1-f^2$ не станет больше или равным некоторому α ($0 < \alpha < 1$). Здесь $k=1$, если $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$ возрастают, и $k=-1$, если $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$ убывают.

Обозначим через $\hat{\varphi}_k$ значения аргумента φ функции $u(\varphi)$, в которых та принимает локально-экстремальные значения. Пронумеруем $\hat{\varphi}_k$ в порядке их возрастания. Соответствующие значения φ' для функции $u_1(\varphi')$ обозначим через $\hat{\varphi}'_k$. Пусть $\theta = \min_k (\hat{\varphi}_k - \varphi_{k-1})$, а $\theta' = \min_k (\hat{\varphi}'_k - \hat{\varphi}'_{k-1})$.

Поведение функции $\rho_{\text{ос}}(\varphi)$ при малых δ характеризует следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функции $u(\varphi)$ и $u_1(\varphi')$ удовлетворяют условиям теоремы 1, а также условию $\min(\theta, \theta') \geq \alpha > 0$; тогда для любых $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|\rho_{\text{ос}}(\varphi) - \bar{\rho}(\varphi)| < \varepsilon$ всюду в $[\varphi_1, \varphi_2]$ (за исключением, быть может, множества $\Delta\varphi$, мера которого $\text{mes } \Delta\varphi < \kappa$), если $|\rho_0 - \bar{\rho}(\varphi_0)| < \varepsilon$, $\varphi_0 \notin \Delta\varphi$, $\varphi_0 \in [\varphi_1, \varphi_2]$.

Модифицированная задача (В) решалась численно на ЭВМ БЭСМ-6. Исследовалась модель ламбертовой сферы единичного радиуса, освещенной параллельным потоком света и точечным источником. При $\delta = 10^{-5}$ относительная неточность определения $\bar{\rho}$ составляла менее 1%. Расстояние от объектива до сферы равнялась 10, а расстояние между объективами 0,1.



На рисунке представлены результаты численного эксперимента. На рисунке, *a* изображен график функции $u(\varphi)$. Рисунок, *б* — это график решения $\rho_{\text{бе}}$ модифицированной задачи (В). Рисунок, *в* иллюстрирует отклонение найденного профиля от профиля сферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хорн Б. В кн.: Психология машинного зрения. М.: Мир, 1978, с. 137—184.
 [2] Гиммельфарб Г. Л., Крот В. М. В кн.: Вопросы теории роботов и искусственного интеллекта. Киев, 1980, с. 3—13. [3] Robert J. Wadham. Artificial Intelligence, 1981, 17, N 1—3, p. 117.

Поступила в редакцию
01.04.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 621.072

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ СВЯЗИ В СИСТЕМАХ СТАБИЛИЗАЦИИ ЧАСТОТЫ

И. И. Минакова, С. А. Лебединский

(кафедра физики колебаний)

В литературе подробно исследуются автоколебания в многоконтурных системах при различном числе контуров и различных типах связей между ними. При создании систем сложения мощностей многих активных элементов в общей нагрузке предпочтение отдается резистивной связи между автогенераторами и высокооборотным контуром в основном из-за необходимости устранить многомодовость режима работы [1—3] и получить относительно высокую стабильность частоты автоколебаний [3, 4]. Изучение поведения трехконтурной реактивно связанной системы, оптимизация ее параметров и исследование области стабильного режима [5] позволили создать сверхстабильный СВЧ-генератор [6]. Однако вопрос о выборе оптимального типа связи для целей стабилизации частоты в системах затягивания высокооборотным контуром остается открытым. Для его решения был рассмотрен двухконтурный генератор с комплексной связью между контурами.

Уравнения движения для такой системы, где за неизвестные взяты токи в контурах $x=I_1$ и $y=I_2$, а характеристика нелинейного элемента аппроксимируется кубическим полиномом $N(x) = r_0x - \frac{1}{3}r_nx^3$, имеют вид

$$\ddot{x} + 2\delta_1'\dot{x} + \nu_1^2x - \alpha_1y - \beta_1\dot{y} - \gamma_1\ddot{y} = \frac{r_0}{L_1+L}\dot{x} - \frac{r_nx^2}{L_1+L}\dot{x}, \quad (1)$$

$$\ddot{y} + 2\delta_2'\dot{y} + \nu_2^2y - \alpha_2x - \beta_2\dot{x} - \gamma_2\ddot{x} = 0.$$

Здесь введены обозначения (L, C, R — элементы связи):

$$\nu_i^2 = \frac{1}{L+L_i} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_i} \right); \quad 2\delta_i' = \frac{R+R_i}{L+L_i};$$

$$\alpha_i = \frac{1}{C(L+L_i)}; \quad \beta_i = \frac{R}{L+L_i}; \quad \gamma_i = \frac{L}{L+L_i}.$$

Для случая одночастотного стационарного режима квазилинейной