ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 512.18+621.372.6

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ДВУХПОЛЮСНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ДВУХПОЛЮСНИКОВ И КОРТЕЖЕЙ ЭТИХ СОЕДИНЕНИЙ

В. И. Шестаков

(кафедра общей физики для физического факультета)

§ 1. Всякий двухполюсник (ДП) можно обозначить недавно введенным [1] символом $\langle X\rangle$, где X — любая комбинация букв и цифр, обозначающая *имя* или «метку» данного ДП. ДП, не содержащий проводников, соединяющих его полюсы, назовем *пустым* и обозначим символом $\langle\ \ \rangle$. Символом $\langle\bullet\rangle$ обозначим *идеально проводящий* ДП, т. е. ДП, полюсы которого соединены внутри него идеальным проводником. ДП $\langle\ \ \rangle$ и $\langle\bullet\rangle$ будем называть *вырожденными.* Условимся рассматривать их как *особые* частные случаи ДП: $\langle X\rangle$, $\langle X_1\rangle$, $\langle X_2\rangle, \ldots$

Символику ДП можно еще несколько упростить, если ввести определения:

$$W \rightleftharpoons \langle X\rangle,\ W_k \rightleftharpoons \langle X_\text{к}\rangle, \tag{D1}$$

где $k=1, 2, \ldots$, и если условиться применять строчные буквы w и w' как переменные с областью значений $\{\langle\ \ \rangle,\ \langle\bullet\rangle\}$.

ДП W, $\langle X\rangle$, $\langle\ \ \rangle$ и $\langle\bullet\rangle$ условимся схематично изображать так, как показано в верхней строке рис. 1, где приведено по два альтернативных схематичных изображения вырожденных ДП: $\langle\ \ \rangle$ и $\langle\bullet\rangle$. Левые из них — изображения, *минимально отличающиеся* от символов $\langle\ \ \rangle$ и $\langle\bullet\rangle$, а правые — *максимально простые* изображения ДП, обозначенных этими символами. В дальнейшем мы будем применять оба вида изображений.

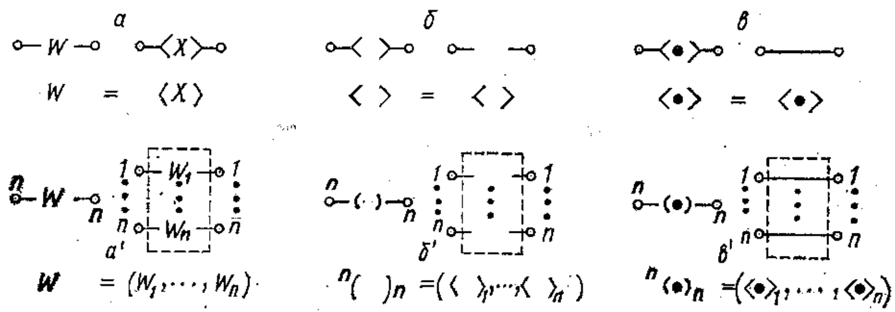

Рис. 1. Символы двухполюсников (ДП) и кортежей ДП

Равенства $W=X$, $W_k=X_k$ очевидно *бессмысленны,* ибо X и X_k являются лишь *именами* («метками») ДП W и W_k, а не символами самих ДП.

Эквивалентность ДП W_i и W_k условимся обозначать символом обычного равенства: $W_i=W_k$. Истинность эквивалентности $W_i=W_k$ может быть установлена либо исходя из теоретико-физических соображений, либо (с некоторой степенью точности) экспериментально.

§ 2. Соединения ДП W и W_k, в результате которых получается снова ДП, назовем *двухполюсными* (ДП-соединениями). Существуют, очевидно, лишь две операции ДП-соединений ДП: *параллельное* (*П-соединение*) и *последовательное,* которые будем по-прежнему обозначать соответственно знаками $+$ и $\bullet$. В результате этих операций, как бы мы ни комбинировали их, получаются лишь *двухполюсные цепи* (ДП-цепи). Алгебра этих цепей была первоначально [2] названа *алгеброй А-схем.* Здесь мы будем называть ее *алгеброй ДП-соединений ДП.* Эта алгебра может быть названа также и *алгеброй П-* и *К-соединений,* ибо последовательное соединение ДП совпадает с *каскадным соединением* (*К-соединением*) тех же ДП.

§ 3. *Основными законами* этой алгебры назовем следующие законы:

$$\text{(I)}\quad (W_1+W_2)+W_3=W_1+(W_2+W_3),\quad (W_1\bullet W_2)\bullet W_3=W_1\bullet(W_2\bullet W_3),\quad \text{(I}'\text{)}$$

$$\text{(II)}\quad W_1+W_2=W_2+W_1,\qquad W_1\bullet W_2=W_2\bullet W_1,\quad \text{(II}'\text{)}$$

$$\text{(III)}\quad W+\langle\ \rangle=W,\qquad W\bullet\langle\bullet\rangle=W,\quad \text{(III}'\text{)}$$

$$\text{(IV)}\quad W+\langle\bullet\rangle=\langle\bullet\rangle,\qquad W\bullet\langle\ \rangle=\langle\ \rangle.\quad \text{(IV}'\text{)}$$

Ассоциативные законы (I) и (I′) утверждают, что операции $+$ и $\bullet$ можно выполнять в последовательности, указываемой как в левых, так и в правых частях формул (I) и (I′). При любой последовательности осуществления операции П-соединения ДП: W_1, W_2 и W_3 — получится ДП-цепь $W_1+W_2+W_3$, и при любой последовательности осуществления операции К-соединения тех же ДП получится ДП-цепь $W_1 \bullet W_2 \bullet W_3$. Истинность этого утверждения очевидна, если W_1, W_2 и W_3 — пассивные ДП. Если же эти ДП содержат внутренние источники энергии, в частности заряженные конденсаторы, то по правилам техники безопасности все эти источники должны быть выключены на время осуществления любых соединений. Поэтому и операции П- и К-соединений *любых* ДП можно считать ассоциативными.

Коммутативные законы (II) и (II′) несомненно справедливы для любых ДП, как линейных, так и нелинейных. Столь же очевидны и законы (III) и (III′), утверждающие, что вырожденные ДП $\langle\ \rangle$ и $\langle\bullet\rangle$ являются *нейтральными элементами* («нулями») операций П- и К-соединений ДП.

Законы (IV) и (IV′) утверждают, что «нули» операций $+$ и $\bullet$, наоборот, являются *всепоглощающими элементами* («универсальными абсорберами») для операций $\bullet$ и $+$ соответственно.

Короче говоря, всякое множество $\mathfrak{M}$ двухполюсников, удовлетворяющее законам (I)—(II′), является коммутативной полугруппой относительно операции П-соединения и относительно операции К-соединения ДП. Алгебра ДП-соединений ДП есть объединение этих полугрупп. Характерной особенностью такой алгебры является то, что, согласно законам (III)—(IV′), нейтральный элемент каждой из упомянутых полугрупп играет роль всепоглощающего элемента другой из них.

§ 4. *Кортежи n* любых ДП: $W_1, ..., W_n$ и n любых одинаковых вырожденных ДП условимся обозначать соответственно символами $(W_1, ..., W_n)$, $(\langle\ \rangle_1, ..., \langle\ \rangle_n)$ и $(\langle\bullet\rangle_1, ..., \langle\bullet\rangle_n)$ или более *компактными символами:* $\mathbf{W}$, ${}^n(\ )_n$ и ${}^n(\bullet)_n$, определяемыми следующими формулами:

$$\mathbf{W}\rightleftharpoons(W_1, \ldots, W_n),\ {}^n(\ )_n\rightleftharpoons(\langle\ \rangle_1, \ldots, \langle\ \rangle_n),\ {}^n(\bullet)_n\rightleftharpoons(\langle\bullet\rangle_1, \ldots, \langle\bullet\rangle_n), \quad \text{(D2)}$$

где $\langle\ \rangle_1= \ldots =\langle\ \rangle_n=\langle\ \rangle$, $\langle\bullet\rangle_1= \ldots =\langle\bullet\rangle_n=\langle\bullet\rangle$.

Однокомпонентные кортежи ДП, очевидно, сами ДП, т. е. при $n=1$ имеем равенства

$$(W_1)=\mathbf{W}_1,\ {}^1(\quad)_1=\langle\quad\rangle,\ {}^1(\bullet)_1=\langle\bullet\rangle. \qquad (1)$$

Определения ($D2$) иллюстрируют схемы в нижней строке рис. 1. Правые части формул ($D2$) иллюстрируются правыми частями рис. 1, a', $б'$ и $в'$. Кортежи ДП, определенные формулами ($D2$), являются, очевидно, частными случаями *(n,n)-полюсников* и потому изображены на рис. 1, a', $б'$ и $в'$ заключенными в пунктирные прямоугольники.

Эквивалентность кортежей $\mathbf{W}_1=(W_{11},\ldots,W_{1n})$, $\mathbf{W}_2=(W_{21},\ldots,W_{2n})$ определим формулой

$$(\mathbf{W}_1=\mathbf{W}_2)\rightleftharpoons(W_{11}=W_{21})\wedge\ldots\wedge(W_{1n}=W_{2n}), \qquad \text{(D3)}$$

где $\wedge$ — знак *конъюнкции* [3]. Аналогично определяется и эквивалентность $\mathbf{w}_1=\mathbf{w}_2$ кортежей вырожденных ДП. Если, в частности,

$$w_{11}=,\ldots,=w_{1n}=\langle\quad\rangle=w_{21}=,\ldots,=w_{2n}, \qquad (2)$$

то

$$\mathbf{w}_1=\mathbf{w}_2={}^{\mathrm{n}}(\quad)_{\mathrm{n}}. \qquad (3)$$

Аналогично, если

$$w_{11}=\ldots,=w_{1n}=\langle\bullet\rangle=w_{21}=,\ldots,=w_{2n}, \qquad (2')$$

то

$$\mathbf{w}_1=\mathbf{w}_2={}^{\mathrm{n}}(\bullet)_{\mathrm{n}}. \qquad (3')$$

П- и К-соединения кортежей $\mathbf{W}_1$ и $\mathbf{W}_2$ определим формулами

$$(W_{11},\ldots,W_{1n})+(W_{21},\ldots,W_{2n})\rightleftharpoons(W_{11}+W_{21},\ldots,W_{1n}+W_{2n}), \qquad \text{(D4)}$$

$$(W_{11},\ldots,W_{1n})\bullet(W_{21},\ldots,W_{2n})\rightleftharpoons(W_{11}\bullet W_{21},\ldots,W_{1n}\bullet W_{2n}), \qquad \text{(D4')}$$

из которых следуют аналогичные формулы для кортежей $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$.

Из формул (D3), (D4), (D4′) следуют равенства

$$\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2=(W_{11},\ldots,W_{1n})+(W_{21},\ldots,W_{2n})=(W_{11}+W_{21},\ldots,W_{1n}+W_{2n}), \qquad (4)$$

$$\mathbf{W}_1\bullet\mathbf{W}_2=(W_{11},\ldots,W_{1n})\bullet(W_{21},\ldots,W_{2n})=(W_{11}\bullet W_{21},\ldots,W_{1n}\bullet W_{2n}), \qquad (4')$$

иллюстрируемые соответственно рис. 2, a и 2, $б$.

В силу определений (D2), (D3), (D4), (D4′) из основных законов (I)—(IV′) алгебры ДП-соединений ДП следуют аналогичные *законы алгебры кортежей ДП-соединений* ДП:

$$\text{(I)}_n\quad(\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2)+\mathbf{W}_3=\mathbf{W}_1+(\mathbf{W}_2+\mathbf{W}_3),\quad(\mathbf{W}_1\bullet\mathbf{W}_2)\bullet\mathbf{W}_3=\mathbf{W}_1\bullet(\mathbf{W}_2\bullet\mathbf{W}_3),\quad\text{(I')}_n$$

$$\text{(II)}_n\quad\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2=\mathbf{W}_2+\mathbf{W}_1,\qquad\mathbf{W}_1\bullet\mathbf{W}_2=\mathbf{W}_2\bullet\mathbf{W}_1,\quad\text{(II')}_n$$

$$\text{(III)}_n\quad\mathbf{W}+{}^{\mathrm{n}}(\quad)_{\mathrm{n}}=\mathbf{W},\qquad\mathbf{W}\bullet{}^{\mathrm{n}}(\bullet)_{\mathrm{n}}=\mathbf{W},\quad\text{(III')}_n$$

$$\text{(IV)}_n\quad\mathbf{W}+{}^{\mathrm{n}}(\bullet)_{\mathrm{n}}={}^{\mathrm{n}}(\bullet)_{\mathrm{n}},\qquad\mathbf{W}\bullet{}^{\mathrm{n}}(\quad)_{\mathrm{n}}={}^{\mathrm{n}}(\quad)_{\mathrm{n}}.\quad\text{(IV')}_n$$

Алгебра ДП-соединений ДП является очевидным частным случаем алгебры кортежей ДП-соединений ДП, получаемым из этой последней при $n=1$. Заменяя в формулах (I)_n—(IV')_n полужирные буквы $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$, $\mathbf{W}$ соответствующими буквами W_1, W_2, W_3, W обычного шрифта и символы ${}^{\mathrm{n}}(\quad)_{\mathrm{n}}$, ${}^{\mathrm{n}}(\bullet)$ соответственно символами $\langle\quad\rangle$ и $\langle\bullet\rangle$, получим основные законы (I)—(IV′) алгебры ДП-соединений ДП.

Произведя ту же замену в рис. 3 и 4, иллюстрирующих законы $(\mathrm{II})_n$ и $(\mathrm{II}')_n$ и соответственно законы $(\mathrm{III})_n$—$(\mathrm{IV}')_n$, получим рисунки, иллюстрирующие законы (II), (II′) и законы (III)—(IV′) алгебры ДП-соединений ДП.

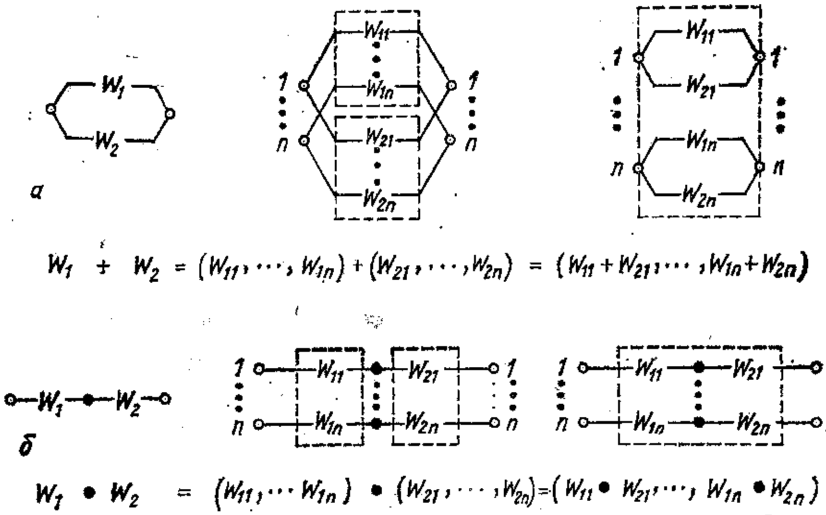

Рис. 2. Параллельное и каскадное соединения кортежей ДП

Следует отметить, что *алгебра кортежей ДП-соединений ДП — коммутативная алгебра* в отличие от алгебры П- и К-соединений любых (n,n)-полюсников, ибо К-соединение в общем случае некоммутативно.

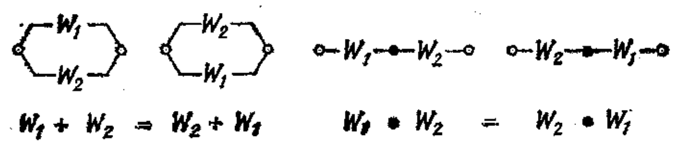

Рис. 3. Законы коммутативности параллельного и каскадного соединений кортежей двухполюсных соединений ДП

§ 5. Операцию w', определяемую условиями

$$w' \rightleftharpoons \begin{cases} \langle \bullet \rangle, & \text{если } w = \langle\ \rangle, \\ \langle\ \rangle, & \text{если } w = \langle \bullet \rangle, \end{cases} \tag{D5}$$

назовем *инверсией* вырожденного ДП (ВДП) w.

Из этого определения следует, что

$$\text{(5)} \qquad \langle\ \rangle' = \langle \bullet \rangle, \qquad \langle \bullet \rangle' = \langle\ \rangle, \qquad \text{(5')}$$

т. е. операция инверсии преобразует ВДП, изображенный на рис. 1, *б*, в ВДП, изображенный на рис. 1, *в* или обратно.

Операцию *инверсии кортежей* ВДП определим формулой

$$(w_1, ..., w_n)' \rightleftharpoons (w_1', ..., w_n'). \tag{D6}$$

Кортежи $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ и $\mathbf{w}' = (w_1', \dots, w_n')$ назовем *взаимно-инверсными*. В частности, взаимно-инверсными являются и кортежи $^n(\ )_n$, $^n(\bullet)_n$.

Из законов (IV), (IV′) следуют формулы

$$(6)_n \qquad {}^{n}(\ )_{n}+{}^{n}(\bullet)_{n}={}^{n}(\bullet)_{n}, \qquad {}^{n}(\ )_{n}\bullet{}^{n}(\bullet)_{n}={}^{n}(\ )_{n}, \qquad (6')_n$$

и, в частности, формулы

$$(6) \qquad \langle\ \rangle+\langle\bullet\rangle=\langle\bullet\rangle, \qquad \langle\ \rangle\bullet\langle\bullet\rangle=\langle\ \rangle. \qquad (6')$$

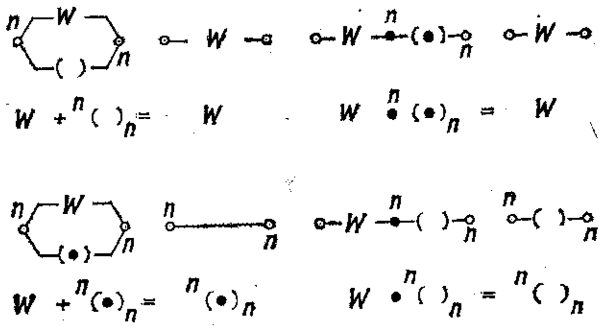

Рис. 4. Нейтральные и всепоглощающие элементы операций параллельного и каскадного соединений кортежей ДП-соединений ДП

Эти формулы верны для *каждой компоненты* кортежей ВДП $\mathbf{w}$ и $\mathbf{w}'$, и потому, очевидно, справедливы формулы

$$(7)_n \qquad \mathbf{w}+\mathbf{w}'={}^{n}(\bullet)_{n}, \qquad \mathbf{w}\bullet\mathbf{w}'={}^{n}(\ )_{n}, \qquad (7')_n$$

иллюстрируемые рис. 5. Во избежание недоразумения заметим, что кортежи ${}^{n}(\ )_{n}$, ${}^{n}(\bullet)_{n}$, изображенные на рис. 5 *упрощенно*, как якобы

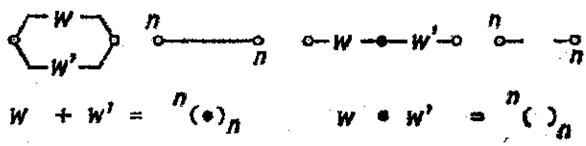

Рис. 5. Параллельные и каскадные соединения взаимно-дополнительных вырожденных кортежей ДП-соединений ДП

«ДП с n-кратными полюсами», на самом деле *имеют тот же смысл*, что и кортежи, изображенные в правых частях рис. 1, *б′* и *в′* соответственно.

§ 6. Из основных законов алгебры ДП-соединений ДП следует, что

$$(8) \qquad (W_1\bullet w)+w=w, \qquad (W_1+w)\bullet w=w, \qquad (8')$$

$$(9) \quad w\bullet(W_2+W_3)=(w\bullet W_2)+(w\bullet W_3), \quad w+(W_2\bullet W_3)=(w+W_2)\bullet(w+W_3), \quad (9')$$

$$(10) \qquad (w\bullet w')+W_2=W_2, \qquad (w+w')\bullet W_2=W_2, \qquad (10')$$

где W_1, W_2, W_3 — любые ДП, а w — любой ВДП.

Действительно, в силу законов (IV′) и (III) получаем следующие равенства:

$$(W_1\bullet\langle\ \rangle)+\langle\ \rangle=\langle\ \rangle+\langle\ \rangle=\langle\ \rangle, \qquad (a)$$

а в силу законов (III′) и (IV) — равенства

$$(W_1 \bullet \langle \bullet \rangle) + \langle \bullet \rangle = W_1 + \langle \bullet \rangle = \langle \bullet \rangle. \tag{б}$$

Из равенств (а) и (б) следует формула (8), ибо переменная w имеет лишь два значения: $\langle\ \rangle$ и $\langle \bullet \rangle$. Аналогично можно убедиться, что и формула (8′) является следствием тех же законов.

Доказательство формул (9) и (9′) также сводится к проверке их при двух возможных значениях w, но при этом придется использовать законы (II) и (II′). Формулы (10) и (10′) являются следствиями законов (II), (II′), формул $(7)_n$, $(7')_n$ и законов (IV) и (IV′).

В том частном случае, когда $W_1 = w_1$, $W_2 = w_2$, $W_3 = w_3$, законы (II), (II′), (I), (I′) и формулы (8)—(10′) принимают следующий вид:

$$w_1 + w_2 = w_2 + w_1, \qquad w_1 \bullet w_2 = w_2 \bullet w_1, \tag{A1}$$

$$(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3), \quad (w_1 \bullet w_2) \bullet w_3 = w_1 \bullet (w_2 \bullet w_3), \tag{A2}$$

$$(w_1 \bullet w_2) + w_2 = w_2, \qquad (w_1 + w_2) \bullet w_2 = w_2, \tag{A3}$$

$$w_1 \bullet (w_2 + w_3) = (w_1 \bullet w_2) + (w_1 \bullet w_3), \quad w_1 + (w_2 \bullet w_3) = (w_1 + w_2) \bullet (w_1 + w_3), \tag{A4}$$

$$(w_1 \bullet w_1') + w_2 = w_2, \qquad (w_1 + w_1') \bullet w_2 = w_2, \tag{A5}$$

т. е. совпадают с аксиомами булевой алгебры [4].

Операции П- и К-соединений вырожденных ДП являются соответственно операциями булева сложения и булева умножения, а операция инверсии w' вырожденного ДП w — операцией булева дополнения (отрицания в логической интерпретации). Вырожденные ДП $\langle\ \rangle$ и $\langle \bullet \rangle$ являются соответственно нулем и единицей булевой алгебры.

Таким образом, алгебра ДП-соединений любых ДП содержит булеву алгебру, но не сводится к ней. Иначе говоря, эта алгебра может быть названа *частично-булевой алгеброй,* если иметь в виду, что в ней справедливы законы (I)—(II′) и формулы (8)—(10′), являющиеся некоторым обобщением аксиом булевой алгебры.

§ 7. В силу определений (D2)—(D6) из формул (8)—(10′) следуют аналогичные формулы для *кортежей* ДП-соединений ДП:

$(8)_n$ $$(\mathbf{W}_1 \bullet \mathbf{w}) + \mathbf{w} = \mathbf{w}, \qquad (\mathbf{W}_1 + \mathbf{w}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{w}, \tag{8′}$$

$(9)_n$ $$\mathbf{w} \bullet (\mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3) = (\mathbf{w} \bullet \mathbf{W}_2) + (\mathbf{w} \bullet \mathbf{W}_3), \quad \mathbf{w} + (\mathbf{W}_2 \bullet \mathbf{W}_3) = (\mathbf{w} + \mathbf{W}_2) \bullet (\mathbf{w} + \mathbf{W}_3), \tag{9′}$$

$(10)_n$ $$(\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}') + \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_2, \qquad (\mathbf{w} + \mathbf{w}') \bullet \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_2, \tag{10′}$$

где $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$ — n-компонентные кортежи *любых* ДП, а $\mathbf{w}$ — любой n-компонентный кортеж вырожденных ДП. Так как каждая компонента этого кортежа может иметь только два значения: $\langle\ \rangle$ и $\langle \bullet \rangle$, то существует, очевидно, лишь 2^n различных значений кортежа $\mathbf{w}$.

Вырожденные кортежи ${}^n\langle\ \rangle_n$ и ${}^n\langle \bullet \rangle_n$ назовем *особыми*. Заметим, что для особых кортежей формулы $(8)_n$—$(10')_n$ можно получить также и из законов $(\mathrm{I})_n$—$(\mathrm{IV}')_n$ аналогично тому, как формулы (8)—(10′) были получены в § 6 из основных законов (I)—(IV′).

В частном случае, когда $\mathbf{W}_1 = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{W}_2 = \mathbf{w}_2$, $\mathbf{W}_3 = \mathbf{w}_3$, получаем формулы $(\mathrm{A1})_n$—$(\mathrm{A5})_n$ совершенно аналогично тому, как в § 6 были получены формулы (A1)—(A5). Ввиду того что формулы $(\mathrm{A1})_n$—$(\mathrm{A5})_n$ отличаются от формул (A1)—(A5) лишь тем, что все содержащиеся в них буквы *полужирного*, а не обычного шрифта, не будем приводить здесь формулы $(\mathrm{A1})_n$—$(\mathrm{A5})_n$ в явном виде.

Итак, операции П- и К-соединений *кортежей вырожденных* ДП являются соответственно операциями булева сложения и булева умножения, а операция инверсии $\mathbf{w}'$ кортежа $\mathbf{w}$ вырожденных ДП — операцией булева дополнения. Особые кортежи $^n(\ )_n$ и $^n(\bullet)_n$ являются соответственно *нулем* и *единицей* булевой алгебры кортежей ДП-соединений *вырожденных* ДП. Таким образом, алгебра кортежей ДП-соединений ДП содержит булеву алгебру кортежей ДП-соединений ДП и потому также может быть названа *частично-булевой алгеброй,* как и алгебра ДП-соединений ДП, являющаяся очевидным частным случаем алгебры кортежей ДП-соединений ДП.

§ 8. П- и К-соединения кортежей $\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_m$ любых ДП условимся обозначать символами $\sum\limits_{i=1}^{m} \mathbf{W}_i$ и $\mathop{\Xi}\limits_{i=1}^{m} \mathbf{W}_i$, определяемыми рекуррентно:

$$\sum_{i=1}^{1} \mathbf{W} \rightleftharpoons \mathbf{W}_1, \quad \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{W}_i \rightleftharpoons \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{W}_i\right) + \mathbf{W}_{m+1}, \tag{D7}$$

$$\mathop{\Xi}_{i=1}^{1} \mathbf{W}_i \rightleftharpoons \mathbf{W}_1, \quad \mathop{\Xi}_{i=1}^{m+1} \mathbf{W}_i \rightleftharpoons (\mathop{\Xi}_{i=1}^{m} \mathbf{W}_i) \bullet \mathbf{W}_{m+1}. \tag{D7$'$}$$

Эти символы обладают всеми общими свойствами обычной суммы. Однако если $\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_i$ и $\mathbf{W}_j = \mathbf{w}_j$, где $\mathbf{w}_i$ и $\mathbf{w}_j$ — кортежи ВДП для каждого значения i и j $(i=1, \ldots l;\ j=1, \ldots m)$, то операции $\sum\limits_{i=1}^{l} \mathbf{W}_i$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} \mathbf{W}_j$ сводятся соответственно к булевой сумме $\sum\limits_{j=1}^{l} \mathbf{w}_j$ и к булеву произведению $\mathop{\Xi}\limits_{j=1}^{m} \mathbf{w}_j$ кортежей $\mathbf{w}_i$ и $\mathbf{w}_j$ вырожденных ДП и, следовательно, все операции над $\sum\limits_{i=1}^{l} \mathbf{w}_i$ и $\mathop{\Xi}\limits_{j=1}^{m} \mathbf{w}_j$ должны производиться по правилам булевой алгебры. Например, из взаимной дистрибутивности операций булева сложения и булева умножения следуют дистрибутивные законы

$$(11)\quad \sum_{i=1}^{l} \mathbf{w}_i \bullet \sum_{j=1}^{m} \mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{w}_i \bullet \mathbf{w}_j, \quad \mathop{\Xi}_{i=1}^{l} \mathbf{w}_i + \mathop{\Xi}_{j=1}^{m} \mathbf{w}_j = \mathop{\Xi}_{i=1}^{l} \mathop{\Xi}_{j=1}^{m} (\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_j), \quad (11')$$

где $\mathbf{w}_i$ и $\mathbf{w}_j$ — кортежи ВДП при любых значениях i и j.

Если же мы имеем дело с кортежами, лишь часть которых является кортежами ВДП, то в этом случае будут верны лишь такие формулы, которые являются следствиями формул $(8)_n$—$(10')_n$. Так, например, из формул $(9)_n$ и $(9')_n$ следуют дистрибутивные законы

$$(12)\quad \mathbf{w} \bullet \sum_{j=1}^{m} \mathbf{W}_j = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{w} \bullet \mathbf{W}_j, \qquad \mathbf{w} + \mathop{\Xi}_{j=1}^{m} \mathbf{W}_j = \mathop{\Xi}_{j=1}^{m} (\mathbf{w} + \mathbf{W}_j), \quad (12')$$

где $\mathbf{w}$ — кортеж ВДП, а $\mathbf{W}_j$ — кортеж любых ДП. При замене в этих формулах кортежа $\mathbf{w}$ вырожденных ДП кортежем *любых* ДП эти формулы становятся ложными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шестаков В. И. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1982, 23, № 1, с. 31. [2] Шестаков В. И. ЖТФ, 1941, 11, № 6, с. 532. [3] Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Введение в математическую логику. М.: Изд-во МГУ, 1982. [4] Математическая энциклопедия. Т. 1. «Булева алгебра». М., 1977.

Поступила в редакцию
07.04.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 539.1.01

СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ (СЛУЧАЙ АЗИМУТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ)

В. Ч. Жуковский, О. Е. Шишанин

(кафедра теоретической физики)

Поскольку с каждым годом постоянно расширяется область применения синхротронного излучения, то становится необходимым получение новых более точных данных о характеристиках этого излучения. Формирующееся в циклических ускорителях излучение очень чувствительно к точности управляющего движением электронов магнитного поля. Это особенно важно учитывать при проектировании и постройке новых установок, предназначенных именно для получения синхротронного излучения.

Поляризационно-угловые свойства синхротронного излучения в однородных и неоднородных магнитных полях были рассмотрены, в частности, в работах [1—3]. В данной заметке, являющейся продолжением работы [4], исследуется вопрос о свойствах излучения в магнитном поле с нарушенной аксиальной симметрией.

Аксиальная симметрия относительно оси z приводит к тому, что электроны совершают свободные, или бетатронные, колебания. В модели слабофокусирующего аксиально-симметричного поля цилиндрические составляющие магнитного поля вблизи равновесной орбиты имеют вид

$$H_r = -q\frac{bz}{r^{q+1}}, \quad H_\varphi = 0, \quad H_z = \frac{b}{r^q}\left(1 - \frac{q^2}{2}\frac{z^2}{r^2}\right),$$

где q — показатель спадения поля, $b=\text{const}$.

Там, где радиальная составляющая поля равна нулю, $H_r=0$, проходит так называемая медианная поверхность. В реальных случаях происходит относительный сдвиг секторов магнита, имеются локальные искажения внутри каждого сектора, вследствие этого медианная поверхность не является плоскостью. Все эти искажения магнитного поля приводят к дополнительной силе Лоренца, действующей на частицу с периодом, равным периоду ее обращения [5—8]. Появляются вызванные этой силой вынужденные колебания, около которых происходят свободные колебания.

В этом случае составляющая магнитного поля H_r будет уже периодической функцией:

$$H_r = -q\frac{bz}{r^{q+1}} - \frac{H_{r0}}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} H_{rk}\cos(k\varphi - \varphi_k),$$