СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шестаков В. И. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1982, 23, № 1, с. 31. [2] Шестаков В. И. ЖТФ, 1941, 11, № 6, с. 532. [3] Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Введение в математическую логику. М.: Изд-во МГУ, 1982. [4] Математическая энциклопедия. Т. 1. «Булева алгебра». М., 1977.

Поступила в редакцию
07.04.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 539.1.01

# СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ (СЛУЧАЙ АЗИМУТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ)

**В. Ч. Жуковский, О. Е. Шишанин**

*(кафедра теоретической физики)*

Поскольку с каждым годом постоянно расширяется область применения синхротронного излучения, то становится необходимым получение новых более точных данных о характеристиках этого излучения. Формирующееся в циклических ускорителях излучение очень чувствительно к точности управляющего движением электронов магнитного поля. Это особенно важно учитывать при проектировании и постройке новых установок, предназначенных именно для получения синхротронного излучения.

Поляризационно-угловые свойства синхротронного излучения в однородных и неоднородных магнитных полях были рассмотрены, в частности, в работах [1—3]. В данной заметке, являющейся продолжением работы [4], исследуется вопрос о свойствах излучения в магнитном поле с нарушенной аксиальной симметрией.

Аксиальная симметрия относительно оси $z$ приводит к тому, что электроны совершают свободные, или бетатронные, колебания. В модели слабофокусирующего аксиально-симметричного поля цилиндрические составляющие магнитного поля вблизи равновесной орбиты имеют вид

$$H_r = -q\frac{bz}{r^{q+1}}, \quad H_\varphi = 0, \quad H_z = \frac{b}{r^q}\left(1 - \frac{q^2}{2}\frac{z^2}{r^2}\right),$$

где $q$ — показатель спадения поля, $b = \text{const}$.

Там, где радиальная составляющая поля равна нулю, $H_r = 0$, проходит так называемая медианная поверхность. В реальных случаях происходит относительный сдвиг секторов магнита, имеются локальные искажения внутри каждого сектора, вследствие этого медианная поверхность не является плоскостью. Все эти искажения магнитного поля приводят к дополнительной силе Лоренца, действующей на частицу с периодом, равным периоду ее обращения [5—8]. Появляются вызванные этой силой вынужденные колебания, около которых происходят свободные колебания.

В этом случае составляющая магнитного поля $H_r$ будет уже периодической функцией:

$$H_r = -q\frac{bz}{r^{q+1}} - \frac{H_{r0}}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} H_{rk}\cos(k\varphi - \varphi_k),$$

здесь $H_{r0}$, $H_{rk}$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье величины $H_r$. Заметим, что для произвольной медианной поверхности $H_{r0}$ и $H_{rk}$ нужно определять численными методами.

Уравнения движения для электрона в таком поле в квадратичном приближении имеют вид

$$\ddot{\rho}+(1-q)\omega_0^2\rho=R\,\omega_0^2\left[\frac{(1-q)(3+q)}{2}\frac{\rho^2}{R^2}+\frac{q}{2}+\frac{B^2}{R^2}+\frac{q}{8}\frac{z_0^2}{R^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{q}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k^2}{R^2}-\frac{1}{2}\frac{\dot{z}^2}{c^2}+\frac{q^2}{2}\frac{z^2}{R^2}\right], \qquad (1)$$

$$\ddot{z}+q\omega_0^2 z=R\omega_0^2\left[q(1+q)\frac{\rho}{R}\frac{z}{R}+\frac{q}{2}\frac{z_0}{R}-\sum_{k=1}^{\infty}(k^2-q)\frac{z_k}{R}\cos(k\varphi-\varphi_k)\right], \qquad (2)$$

$$\dot{\varphi}=\omega_0\left(1-\frac{\rho}{R}+\frac{3-q}{2}\frac{\rho^2}{R^2}+\frac{q}{2}\frac{B^2}{R^2}+\frac{q}{8}\frac{z_0^2}{R^2}+\frac{q}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k^2}{R^2}-\frac{1}{2}\frac{\dot{z}^2}{c^2}\right), \qquad (3)$$

где $\omega_0=ce_0H_0/E$, $H_0=b/R^q$, $\rho=r-R$, $R$ — радиус равновесной орбиты, $z_0=-\frac{R}{q}\frac{H_{r0}}{H_0}$, $z_k=\frac{R}{k^2-q}\frac{H_{rk}}{H_0}$ — амплитуды вынужденных колебаний, $B$ — амплитуда вертикальных бетатронных колебаний.

Следует заметить, что ранее в работе [4] в уравнении (1) не принималась во внимание правая часть, а в уравнении (2) справа не учитывался первый член.

Решая уравнения (1) и (2) итерационными методами, получим:

$$\rho=A\sin\omega_\rho+\frac{3+q}{4}\left(1+\frac{1}{3}\cos 2\omega_\rho\right)\frac{A^2}{R}+\frac{q(1+q)}{4}\left(\frac{1}{1-q}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5q-1}\cos 2\omega_z\right)\frac{B^2}{R}+\frac{q(1+q)}{8(1-q)}\frac{z_0^2}{R}-\frac{q^2}{2(2q-1)}z_0\frac{B}{R}\sin\omega_z+\sum_{k=1}^{\infty}\left(F_1B\frac{z_k}{R}+\right.$$

$$\left.+F_2z_0\frac{z_k}{R}+F_3\frac{z_k^2}{R}+\sum_{m=1}^{\infty}F_4z_m\frac{z_k}{R}\right), \quad k\neq m;$$

$$z=B\sin\omega_z+\frac{q(1+q)}{5q-1}\left(\sin\omega_z\sin\omega_\rho+\frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{1-q}}\cos\omega_z\cos\omega_\rho\right)A\frac{B}{R}+$$

$$+\frac{z_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}z_k\cos(k\varphi-\varphi_k),$$

где

$$F_1=-\frac{1}{2}\left[\frac{q^2+\sqrt{q}k}{(k+\sqrt{q})^2-(1-q)}\sin(\omega_z+k\varphi-\varphi_k)+\frac{q^2-\sqrt{q}k}{(k-\sqrt{q})^2-(1-q)}\sin(\omega_z-\right.$$

$$\left.-k\varphi+\varphi_k)\right],$$

$$F_2=-\frac{q^2}{2}\frac{1}{k^2-(1-q)}\cos(k\varphi-\varphi_k),$$

$$F_3 = \frac{1}{4}\left[\frac{2q+q^2-k^2}{1-q} - \frac{q^2+k^2}{4k^2-(1-q)}\cos 2(k\varphi-\varphi_k)\right],$$

$$F_4 = -\frac{1}{4}\left[\frac{q^2+2km}{(k+m)^2-(1-q)}\cos(k\varphi-\varphi_k+m\varphi-\varphi_m) + \frac{q^2-2km}{(k-m)^2-(1-q)}\cos(k\varphi - \right.$$

$$\left. -\varphi_k - m\varphi + \varphi_m)\right],$$

$$\omega_\rho = \sqrt{1-q}\,\omega_0 t + \chi,\ \omega_z = \sqrt{q}\,\omega_0 t + \psi,$$

$A$ — амплитуда радиальных бетатронных колебаний, $\chi$ и $\psi$ — начальные фазы бетатронных колебаний.

При данном подходе к решению задачи о движении электрона его полная скорость равна

$$v = R\omega_0\left[1 + (1-q)\frac{A^2}{R^2} + q\frac{B^2}{R^2} + \frac{q}{4}\frac{z_0^2}{R^2} + q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k^2}{R^2}\right]^{1/2}.$$

Следуя работе [4], волновой вектор излучения возьмем в виде

$$\varkappa = \left\{\frac{\omega}{c}\sin\theta\cos\eta,\ \frac{\omega}{c}\sin\theta\sin\eta,\ \frac{\omega}{c}\cos\theta\right\},$$

где $\eta$ и $\theta$ — сферические углы точки наблюдения, $\omega = \nu\omega_0$, $\nu$ — номер гармоники. Причем угол $\theta \sim \pi/2$, т. е. регистрирующий прибор находится в плоскости орбиты.

Соответственно этому компонентами линейной поляризации интенсивности излучения будут следующие векторы:

$$\mathbf{n}_\sigma = \{\sin\eta,\ -\cos\eta,\ 0\},\quad \mathbf{n}_\pi = \{\cos\theta\cos\eta,\ \sin\eta\cos\theta,\ -\sin\theta\}.$$

Запишем вероятность излучения, полученную в [9, 10] в квазиклассическом приближении, с учетом первой квантовой поправки:

$$dW = \frac{d^3\varkappa}{(2\pi)^3}\frac{ce^2}{R\hbar\omega}\int dt_1\int dt_2\left(1+\frac{\hbar\omega}{E}\right)(\mathbf{v}_2\mathbf{e})(\mathbf{v}_1\mathbf{e}^*)\exp\left[i\left(1+\frac{\hbar\omega}{E}\right)\{\varkappa(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) - \right.$$

$$\left. -\omega(t_2-t_1)\}\right],$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор поляризации фотона, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — классические значения радиус-вектора и скорости частицы.

Согласно последней формуле, окончательные выражения для $\sigma$- и $\pi$-компонент интенсивности излучения примут вид

$$\frac{dW_\sigma(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{12\pi^4 c}\left(1+\frac{\hbar\omega}{E}\right)\int_0^{2\pi} d\psi\varepsilon_1^2 K_{2/3}^2\left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{\hbar\omega}{E}\right)\frac{\omega}{\omega_0}\varepsilon_1^{3/2}\right], \qquad (4)$$

$$\frac{dW_\pi(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{12\pi^4 c}\left(1+\frac{\hbar\omega}{E}\right)\int_0^{2\pi} d\psi\varepsilon_1(\varepsilon_1-1+\beta^2)K_{1/3}^2\left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{\hbar\omega}{E}\right)\frac{\omega}{\omega_0}\varepsilon_1^{3/2}\right],$$

где $\varepsilon_1 = 1-\beta^2+\left[\cos\theta - \sqrt{q}\,\frac{B}{R}\cos\psi + \sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{z_k}{R}\sin(k\varphi_0-\varphi_k)\right]^2$,

$\varphi_0 = \varphi(0)$ — константа интегрирования уравнения (3). Угол $\varphi_0$ соответствует, например, началу какого-либо сектора ускорителя, причем рас-

чет коэффициентов ряда Фурье магнитного поля $H_r$ следует проводить уже с учетом этого выбора.

Найденные выражения (4) в первом квантовом приближении описывают спектрально-угловые характеристики синхротронного излучения с учетом бетатронных и вынужденных колебаний.

Для вычисления интегралов в формулах (4) нужно от модифицированных функций Бесселя $K_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$, $K_{2/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$ перейти к функции Эйри $V(x)$ и ее производной. Последние представляются быстро сходящимися степенными рядами [11]. Излучение здесь формируется, как и в случае аксиальной симметрии, на малом участке траектории электрона, но уже вблизи точки орбиты, характеризуемой фиксированным углом $\varphi_0$. В данной работе это имеет принципиальное значение, так как равновесная орбита не является окружностью, в частности, в вертикальной плоскости она может иметь форму, близкую к синусоидальной. Вследствие этого излучение с разных участков орбиты будет приходить к регистрирующему прибору под разными углами, если для него изменять только азимутальный угол вокруг ускорителя, не меняя других координат.

Как было показано в работе [3], вертикальные бетатронные колебания не обращают в нуль минимум $\pi$-компоненты интенсивности излучения в плоскости орбиты. С другой стороны, вынужденные колебания сместят график интенсивности излучения или, в частности, минимум $\pi$-компоненты и соответствующий ему максимум $\sigma$-компоненты от угла $\theta=90°$ на угол, у которого

$$\cos\theta=\sum_{k=1}^{\infty}k\,\frac{z_k}{R}\sin\left(\varphi_k-k\varphi_0\right).$$

При регистрации излучения этот сдвиг, по-видимому, нужно учитывать; прибор, очевидно, должен быть перпендикулярен вектору касательной к орбите, проведенной в точке, соответствующей углу $\varphi_0$. Не исключено, что игнорирование этого факта приводит в экспериментах [2, 12] к неравенству максимумов $\pi$-компоненты.

Во всяком случае, возмущения магнитной системы приводят на практике к тому, что амплитуды вынужденных колебаний значительно превосходят амплитуды бетатронных колебаний. Таким образом, представляется целесообразным изучить свойства излучения в зависимости от вынужденных колебаний, т. е. получить экспериментальные характеристики синхротронного излучения с разных точек орбиты ускорителя при $\varphi_0\in[0, 2\pi]$ и учесть направленность излучения по отношению к приборам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Соколов А. А., Тернов И. М. ЖЭТФ, 1956, **31**, с. 473. [2] Синхротронное излучение/Под ред. А. А. Соколова, И. М. Тернова. М.: Наука, 1966. [3] Жуковский В. Ч., Шишанин О. Е. ЖЭТФ, 1971, **61**, с. 1371. [4] Жуковский В. Ч., Шишанин О. Е. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1975, **16**, № 4, с. 467. [5] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962. [6] Комар Е. Г. Ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1964. [7] Рабинович М. С. Тр. ФИАН, 1958, **10**, с. 23. [8] Шорин К. Н. Тр. IV Межвуз. конф. по электронным ускорителям. М., 1964. [9] Schwinger J. Proc. Nat. Acad. Sci., 1954, **40**, p. 132. [10] Берестецкий В. В., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 1. М.: Наука, 1968. [11] Яковлева Г. Д. Таблицы функций Эйри и их производных. М.: Наука, 1969. [12] Воробьев А. А., Никитин М. М., Кожевников А. В. Атомная энергия, 1970, **29**, с. 389.

Поступила в редакцию
07.04.83