

УДК 535.4

ПОЛОСОВЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОИСТЫХ СРЕД

А. В. Тихонравов

(кафедра математики)

Для широкого класса электродинамических, радиофизических, акустических задач синтеза, рассматриваемых в одномодовом приближении, процесс распространения волны вдоль волноведущей среды описывается уравнениями

$$\frac{dy_1}{dx} = ik\rho(x)y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = ik \frac{1}{\rho(x)} y_1. \quad (1)$$

Здесь k — волновое число, $\rho(x)$ — нормированное волновое сопротивление среды. Величины y_1 и y_2 назовем условно напряжением и током, их реальный физический смысл зависит от конкретной задачи. Если x_0 — длина отрезка волновода с переменной $\rho(x)$, $\rho(x) \equiv 1$ при $x < 0$, $\rho(x) \equiv \rho_0$ при $x > x_0$, а $y_1(x, k)$ и $y_2(x, k)$ — решения (1) с начальными условиями $y_1(0, k) = 1$, $y_2(0, k) = -1$, то энергетический коэффициент пропускания для волны, распространяющейся из одной полубесконечной однородной части волновода в другую, равен

$$T(k) = 4\rho_0 |y_1 - \rho_0 y_2|_{x=x_0}^2.$$

При синтезе, как правило, требуется выбрать длину неоднородной части волновода x_0 и ее волновое сопротивление $\rho(x)$ так, чтобы в некотором спектральном диапазоне $[k_1, k_2]$ энергетический коэффициент пропускания $T(k)$ аппроксимировал заданную функцию $\hat{T}(k)$ с заданной точностью δ . При этом на $\rho(x)$ накладывается ряд условий физической реализуемости, и в первую очередь требование ее положительности и достаточной гладкости. В связи с вопросом о разрешимости задачи синтеза при заданных $\hat{T}(k)$ и δ большой интерес представляет выяснение свойств спектральных характеристик при ограничениях на $\rho(x)$ и x_0 и связанных с ними априорных ограничениях на множество функций $T(k)$ *.

В работе [2] указан ряд свойств, которыми обладают спектральные характеристики при условии, что $\rho(x) > 0$ и $\rho(x)$ — дифференцируемая функция. В [3, 4] приведены некоторые априорные оценки для достижимых значений T на заданной частоте. В данной работе исследуются априорные ограничения на полосовые свойства $T(k)$.

Пусть $r(k)$, $\tau(k)$ — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания. В [2] показано, что в предположении трехкратной дифференцируемости $\rho(x)$ $r(k)/\tau(k)$ является целой функцией конечной степени x_0 и представляется в виде

$$\frac{r(k)}{\tau(k)} = \int_{-x_0}^{x_0} b(t) e^{-ikt} dt, \quad (2)$$

где

$$b(t) = \frac{1}{2} [K_1(x_0, t) - K_2(x_0, t)],$$

* В свое время подобное исследование в теории цепей было выполнено в известной работе Р. Фано [1].

а $K_{1,2}(x, t)$ — решения уравнения

$$K_{xx}'' - K_{tt}'' - q(x)K = 0$$

с начальными данными на характеристиках

$$K(x, -x) = 0, \quad K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(\xi) d\xi$$

при $q(x)$, соответственно равной $q_1(x) = p^2(x) - p'(x)$ и $q_2(x) = p^2(x) + p'(x)$ (здесь $p(x) = 1/2[\rho'(x)/\rho(x)]$).

Как вытекает из результатов [2], $r(k)/\tau(k) \in L_2$. Поэтому, согласно равенству Парсевала, из (2) следует, что

$$\int_0^{\infty} \frac{R(k)}{T(k)} dk = \pi \int_{-x_0}^{x_0} b^2(t) dt. \quad (3)$$

Здесь $R = |r|^2$ — энергетический коэффициент отражения ($T = 1 - R$).

Оценим интеграл в правой части (3). Пусть $|q(x)| \leq c$. Проводя оценку сверху решения $K(x, t)$ как решения уравнения с данными на характеристиках, можно получить, что

$$|K(x, t)| < \frac{1}{2} \sqrt{c \frac{x+t}{x-t}} I_1(\sqrt{c(x^2 + t^2)}).$$

Здесь I_1 — модифицированная функция Бесселя первого порядка. Если обе функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ ограничены сверху одной и той же константой c , для $b(t)$ справедлива такая же оценка с $x = x_0$.

Тогда из (3) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{R(k)}{T(k)} dk &< \frac{\pi c}{4} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{x_0+t}{x_0-t} I_1^2(\sqrt{c(x_0^2 - t^2)}) dt = \\ &= \frac{\pi c x_0}{2} \int_0^1 \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2} I_1^2(x_0 \sqrt{c(1-\xi^2)}) d\xi = \frac{1}{x_0} A(x_0 \sqrt{c}). \end{aligned} \quad (4)$$

Из (3) легко может быть найдена и оценка для интеграла от $R(k)/T(k)$ снизу. Используя неравенство Коши—Буняковского и выражение (2) при $k=0$, находим, что

$$\int_0^{\infty} \frac{R(k)}{T(k)} dk \geq \frac{\pi}{2x_0} \left[\int_{-x_0}^{x_0} b(t) dt \right]^2 = \frac{\pi}{2x_0} \frac{R(0)}{T(0)} = \frac{\pi(1-\rho_0)}{8\rho_0 x_0}.$$

При тех же предположениях, что и выше, из (2) получаем оценку для R/T , справедливую при любом k :

$$\frac{R(k)}{T(k)} \leq x_0 \sqrt{c} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} I_1(x_0 \sqrt{c(1-\xi^2)}) d\xi = B(x_0 \sqrt{c}). \quad (5)$$

Полученные неравенства (4), (5) позволяют проанализировать возможность достижения малых значений T в зависимости от длины неоднородной части волновода x_0 и параметра c , характеризующего степень гладкости волнового сопротивления.

Прежде всего из (4), (5) следует, что при ограничениях сверху на $q_{1,2}(x)$ и x_0 , которые всегда имеют место, принципиально невозможно получить T сколь угодно близким к нулю, а ширину области высокого отражения — сколь угодно большой. Существует связь между шириной области высокого отражения и значением R в ней. Пусть в полосе $[k_1, k_2]$ $R \geq 1 - \delta$ ($T \leq \delta$). Тогда

$$\int_{k_1}^{k_2} \frac{R(k)}{T(k)} dk \geq \frac{1-\delta}{\delta} (k_2 - k_1) \approx (k_2 - k_1)/\delta$$

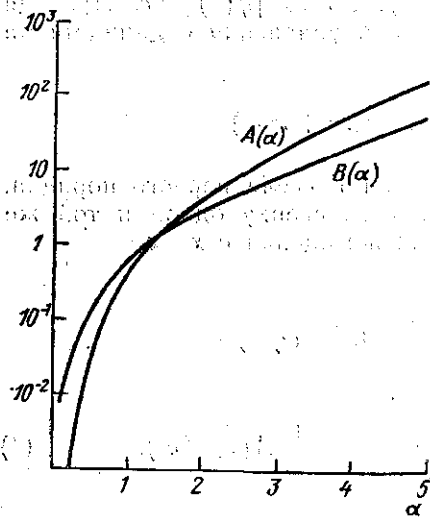
и, даже если бы вся площадь под кривой $R(k)/T(k)$ была сосредоточена в области $[k_1, k_2]$, из (4) следует, что

$$x_0(k_2 - k_1) < \delta \cdot A(x_0 \sqrt{c}). \quad (6)$$

Таким образом, чем меньше δ — допустимый уровень пропуска в области высокого отражения, тем меньшая ширина этой области может быть достигнута. С другой стороны, согласно (6), $T(k)$ заведомо не может быть во всей полосе высокого отражения меньше некоторой величины, пропорциональной ширине этой полосы.

Проверка приведенных оценок для волноведущих систем с различными $\rho(x)$ показывает, что они дают значения, сравнимые по порядку с истинными, и поэтому позволяют получить и количественные представления о зависимости достижимых значений параметров области высокого отражения от длины неоднородной части и от степени ее неоднородности. На рисунке в логарифмическом масштабе приведены графики функций $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ в области изменения α от 0 до 5. Как видно, возможность получения высоких значений R и большей ширины области высокого отражения резко возрастает с увеличением α , т. е. с ростом либо длины неоднородной части, либо степени ее неоднородности.

Проверка приведенных оценок для волноведущих систем с различными $\rho(x)$ показывает, что они дают значения, сравнимые по порядку с истинными, и поэтому позволяют получить и количественные представления о зависимости достижимых значений параметров области высокого отражения от длины неоднородной части и от степени ее неоднородности. На рисунке в логарифмическом масштабе приведены графики функций $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ в области изменения α от 0 до 5. Как видно, возможность получения высоких значений R и большей ширины области высокого отражения резко возрастает с увеличением α , т. е. с ростом либо длины неоднородной части, либо степени ее неоднородности.



Вид функций $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$

Оценка (4) может быть полезна и при исследовании таких систем, как направленные ответвители на связанных неоднородных линиях. В этом случае $r(k)/\tau(k)$ есть не что иное, как коэффициент передачи по напряжению между первичным и вторичным каналами [5]. При синтезе направленных ответвителей требуется, чтобы этот коэффициент был близок к заданной константе в некоторой, достаточно широкой полосе частот $[k_1, k_2]$. При этом весьма существенными являются такие дополнительные условия физической реализуемости, как требования минимальности длины области связи x_0 , достаточной гладкости и малой величины сопротивления связи $\eta(x)$ (функция $\rho(x)$ в (1) связана с $\eta(x)$ равенством $\rho = \sqrt{1 - \eta^2} + \eta$). Интеграл от $|r/\tau|^2$ по области $[k_1, k_2]$ будет, разумеется, значительно отличаться от величины, стоящей в правой части (4). Однако сравнение его с этой величиной позволяет судить, в сколь полной мере использованы возможности синтеза

при данных x_0 и c . Так, например, для направленного ответвителя, синтезированного в [5], значение $\int_{k_1}^{k_2} R/Tdk$ составляет $\sim 1/5$ значения оценки в правой части (4). Это, по-видимому, близко к наивысшему «коэффициенту» использования оценки (4) для направленных ответвителей.

Подводя итог проведенному исследованию в целом, отметим, что уже первые, сделанные в данной работе оценки, позволяют получить априорные представления о реализуемости требуемых полосовых свойств синтезируемых систем с учетом ограничений на их параметры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фано Р. Теоретические ограничения полосы согласования произвольных импедансов. М.: Сов. радио, 1965. [2] Тихонравов А. В. ЖВМ и МФ, 1982, 22, № 6, с. 1421. [3] Рейзенкинд Я. А. Автореф. канд. дис. Саратов, 1980. [4] Тихонравов А. В. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1983, 24, № 3, с. 8. [5] Ковенский С. Ю.; Тихонравов А. В. Радиотехн. и электроника, 1981, 26, № 8, с. 1599.

Поступила в редакцию
15.04.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 518:517.9:53

О РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МТЗ С ПОМОЩЬЮ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ ПО ТИХОНОВУ АЛГОРИТМОВ

В. Б. Гласко, Н. И. Ольховская

(кафедра математики)

1. Предложенный в работах [1—2] метод МТЗ широко используется для изучения глубинных структур земной коры. Развитая в [3—5] теория регуляризации для решения некорректных задач позволяет автоматизировать процесс прогнозирования структур с помощью ЭВМ. В [6] разработан экономичный регуляризирующий алгоритм для прогнозирования геоэлектрического разреза в рамках одномерной модели структуры. Вместе с тем все более актуальной становится задача об изучении структур с произвольным распределением проводимости: $\sigma = \sigma(M)$, $M \in E^n$, $n=1, 2, 3$. Расчету электромагнитного поля в таких структурах при заданной проводимости посвящены, в частности, работы [7, 8]. В работе [9] доказана единственность решения обратной задачи (задачи МТЗ) при произвольной $\sigma(M)$.

В настоящей работе принята двумерная модель, в которой проводимость хорошо аппроксимируется гладкими функциями. Показано, что развитый в [6] алгоритм переносится на этот случай. Сформулирована задача МТЗ для специального случая локального распределения проводимости: $\sigma(x, z) = \sigma_1(x)\sigma_0(z)$ — и с помощью регуляризирующего алгоритма проведен математический эксперимент по определению горизонтальной неоднородности геоэлектрического разреза.

2. Пусть достаточно гладкая функция $\sigma = \sigma(x, z)$, для простоты ченная по x , определена в прямоугольнике $\Pi: |x| \leq L, 0 < z \leq h$, и в случае локальной неоднородности удовлетворяет условию

$$\lim_{|x| \rightarrow L} \sigma(x, z) = \sigma_0(z),$$