при данных x_0 и c. Так, например, для направленного ответвителя, синтезированного в [5], значение $\int\limits_{k_1}^{k_2} R/T dk$ составляет $\sim 1/5$ значения оценки в правой части (4). Это, по-видимому, близко к наивысшему «коэффициенту» использования оценки (4) для направленных ответвителей.

Подводя итог проведенному исследованию в целом, отметим, что уже первые, сделанные в данной работе оценки, позволяют получить априорные представления о реализуемости требуемых полосовых свойств синтезируемых систем с учетом ограничений на их параметры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Фано Р. Теоретические ограничения полосы согласования произвольных импедансов. М.: Сов. радио, 1965. [2] Тихонравов А. В. ЖВМ и МФ, 1982, 22, № 6, с. 1421. [3] Рейзенкинд Я. А. Автореф. канд. дис. Саратов, 1980. [4] Тихонравов А. В. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1983, 24, № 3, с. 8. [5] Ковенский С. Ю., Тихонравов А. В. Радиотехн. и электроника, 1981, 26, № 8, с. 1599.

Поступила в редакцию
15.04.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 518:517.9:53

О РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МТЗ С ПОМОЩЬЮ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ ПО ТИХОНОВУ АЛГОРИТМОВ

В. Б. Гласко, Н. И. Ольховская

(кафедра математики)

1. Предложенный в работах [1—2] метод МТЗ широко используется для изучения глубинных структур земной коры. Развитая в [3—5] теория регуляризации для решения некорректных задач позволяет автоматизировать процесс прогнозирования структур с помощью ЭВМ. В [6] разработан экономичный регуляризирующий алгоритм для прогнозирования геоэлектрического разреза в рамках одномерной модели структуры. Вместе с тем все более актуальной становится задача об изучении структур с произвольным распределением проводимости: $\sigma=\sigma(M)$, $M\in E^n$, $n=1, 2, 3$. Расчету электромагнитного поля в таких структурах при заданной проводимости посвящены, в частности, работы [7, 8]. В работе [9] доказана единственность решения обратной задачи (задачи МТЗ) при произвольной $\sigma(M)$.

В настоящей работе принята двумерная модель, в которой проводимость хорошо аппроксимируется гладкими функциями. Показано, что развитый в [6] алгоритм переносится на этот случай. Сформулирована задача МТЗ для специального случая локального распределения проводимости: $\sigma(x, z)=\sigma_1(x)\sigma_0(z)$ — и с помощью регуляризирующего алгоритма проведен математический эксперимент по определению горизонтальной неоднородности геоэлектрического разреза.

2. Пусть достаточно гладкая функция $\sigma=\sigma(x, z)$, для простоты четная по x, определена в прямоугольнике $\Pi: |x|\leqslant L$, $0<z\leqslant h$, и в случае локальной неоднородности удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|\to L} \sigma(x, z) = \sigma_0(z),$$

где $\sigma_0(z)$ — известная функция. Рассмотрим H-поляризованное, гармоническое (частоты ω) электромагнитное поле, амплитуды которого $\mathbf{E}=\{E_x, 0, E_z\}$, $\mathbf{H}=\{0, H_y, 0\}$. Предполагаем для определенности, что «подстилающее» пространство — изолятор. Согласно [7] и с учетом симметрии по x функция $v(x,z)=H_y(x,z)/H_y(x,0)$, где $H_y(x,0)=$ $=\text{const}$, определяется условиями следующей задачи:

$$\begin{cases} \mathscr{L}(\sigma, v) \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)+i\omega v=0, \quad (x,z)\in \Pi, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\ v|_{z=0}=1,\ v|_{x=L}=v_0(z),\ \dfrac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=h}=0, \end{cases} \tag{1}$$

где $v_0(z)$ соответствует электромагнитному полю в одномерной среде с проводимостью $\sigma_0(z)$. Решение такой задачи получается с высокой точностью на ЭВМ с помощью разностной схемы метода переменных направлений [10], и, таким образом, алгоритмически определена любая характеристика поля на поверхности $z=0$. Согласно [9], в качестве характеристики для однозначного определения $\sigma(x,z)$ может быть выбран импеданс $z=\dfrac{E_x(x,0,\omega)}{H_y(x,0,\omega)}$, и тогда определен оператор $A\sigma\equiv z(x,\ 0,\omega)=\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial v}{\partial z}(x,0,\omega)$. Пусть, с другой стороны, $\tilde{u}=$ $=\tilde{z}(x,0,\omega)$ — наблюдаемый импеданс. Введем аналогичную выбранной в [6] норму уклонения z от $\tilde{z}$; в качестве стабилизатора выберем норму [11]

$$\Omega(\sigma)=\|\sigma\|^2_{W_2^2}=\int_\Pi\left(\sum_{p+q=0}^{2}\frac{\partial^{p+q}\sigma}{\partial x^p\partial z^q}\right)^2 dxdz.$$

Тогда $\sigma=\sigma(x,z)$ определяется задачей минимизации сглаживающего функционала Тихонова [3]:

$$\inf\{\|A\sigma-\tilde{u}\|^2_U+\alpha\Omega(\sigma)\}, \tag{2}$$

где α согласуется с погрешностью наблюдений δ по условию: $\|A\sigma^\alpha - u\|^2_U=\delta$, если σ^α — экстремаль функционала (2). Это условие используется для прерывания итерационного процесса спуска по параметру [6] на последовательности $\{\alpha_S\}\to 0$. Именно, пусть $\sigma_{k+1}=R_\alpha(\sigma_k)$ — какой-либо итерационной процесс минимизации (2) при любом α и начальном приближении $\sigma_0{}^\alpha$; $\sigma_{k+1}\to\sigma^\alpha$ при $k\to\infty$; тогда $\sigma_0^{\alpha_{S+1}}=\sigma^{\alpha_S}$, причем σ^{α_0} при достаточно большом α_0 есть экстремаль стабилизатора.

Этот алгоритм при конкретном выборе $R_\alpha(\sigma)$ использован нами в следующей задаче.

3. Пусть по-прежнему горизонтальная неоднородность имеет локальный характер и может быть аппроксимирована зависимостью $\sigma(x,z)=\sigma_1(x)\sigma_0(z)$, где $\sigma_0(z)$ определяется, как в п. 1. Величину $\sigma_0(z)$ будем считать определенной по наблюдениям вне интервала $|x|<L$ с помощью, например, алгоритма [6]. Тогда задача сводится к поиску проводимости $\sigma_1(x)$, которую будем считать близкой к некоторой гладкой функции.

При любой заданной $\sigma_1(x)$ электромагнитное поле в Π определяется прежней краевой задачей (1). Для определения наряду с полем проводимости $\sigma_1(x)$ зададим в качестве дополнительной информации величину $u\equiv\psi(\omega)=\int_0^L z(x,0,\omega)\,dx$, и пусть $\widetilde{\psi}(\omega)$ — приближение ψ, извлеченное из измерений: $\rho_U(\psi,\widetilde{\psi})\leqslant\delta$. Обозначим через $A\sigma_1\equiv\psi[\omega,\sigma_1]$ величину, получаемую с помощью расчета электромагнитного поля при любой заданной $\sigma_1=\sigma_1(x)$. Рассмотрим $z(x,0,\omega)\equiv\dfrac{v_z'(x,0,\omega)}{\sigma(x,0)}$. Допустим, что $\sigma_1(x)$ — гладкая функция. Тогда искомая характеристика разреза может быть найдена решением следующей вариационной задачи:

$$\inf F_\alpha(\sigma_1)\equiv\inf\{\|A\sigma_1-\widetilde{\psi}\|_U^2+\alpha\Omega_1(\sigma_1)\};\ \|A\sigma_1^\alpha-\widetilde{\psi}\|_U^2=\delta^2, \tag{3}$$

где

$$\Omega_1(\sigma_1)=\int_0^L(\sigma_1'^2(x)+\sigma_1^2(x))\,dx\equiv\|\sigma_1\|_{W_2^1}^2 .$$

В качестве итерационного процесса $R_\alpha(\sigma_1)$ для минимизации (3) при каждом α на сетке $\{\alpha_S\}$ выберем метод Гаусса—Ньютона [12]:

$$F_{\alpha_S}(\sigma_1)=\|A(\sigma_{1_k})+A'_{\sigma_1}(\sigma_{1_k})\cdot(\sigma_1-\sigma_{1_k})-\widetilde{\psi}\|_U^2+\alpha_S\Omega_1(\sigma_1).$$

Оказывается, как и в [6], дифференциал Фреше для $A\sigma_1$ имеет явное выражение:

$$A'_\sigma(\sigma_{1_k})\cdot(\sigma_1-\sigma_{1_k})=\int_0^L\varkappa_k(\xi,\omega)\cdot(\sigma_1(\xi)-\sigma_{1_k}(\xi))\,d\xi, \tag{4}$$

где $\varkappa_k(\xi,\omega)=\displaystyle\int_0^h\frac{\sigma_0(\eta)}{\sigma_k^2(\xi)}(\nabla v_k,\nabla w_k)\,d\eta$, v_k — решение задачи (1) при $\sigma_k=\sigma_{1_k}(x)\,\sigma_0(z)$, w_k — решение той же задачи с заменой одного из граничных условий: $w_k|_{x=L}=0$.

В самом деле, пусть $\zeta(x,z)$ — вариация $\sigma(x,z)$ в окрестности $\widehat{\sigma}(x,z):\sigma=\widehat{\sigma}+\zeta$, а $G(x,z,\xi,\eta)$ — функция Грина для однородной краевой задачи, отвечающей (1). Тогда, вводя соответствующую вариацию поля, нетрудно убедиться, что

$$A\sigma\equiv\int_0^L\frac{\widehat{v}_z'(x,0,\omega)}{\widehat{\sigma}(x,0)}\,dx-\int_0^L\frac{\widehat{v}_z'(x,0,\omega)}{\widehat{\sigma}^2(x,0)}\,\zeta(x,0)\,dx-$$

$$-\int_\Pi\left(\int_0^L\frac{\partial G}{\partial z}(x,0,\xi,\eta)\frac{1}{\widehat{\sigma}(x,0)}\,dx\right)\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\zeta}{\widehat{\sigma}^2}\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\zeta}{\widehat{\sigma}^2}\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\eta}\right)\right\}d\xi\,d\eta.$$

Пользуясь определением функции Грина и функции w, можно заметить, что

$$w(\xi,\eta)=\int_\Pi[G\mathscr{L}(w)-w\mathscr{L}(G)]\,dx\,dz=\int_0^L\frac{\partial G}{\partial z}(x,0,\xi,\eta)\,\frac{1}{\widehat{\sigma}(x,0)}\,dx.$$

Тогда интегрирование по частям в предшествующем выражении приводит к формуле $A\sigma=A\widehat{\sigma}+\displaystyle\int_\Pi\frac{1}{\widehat{\sigma}^2}(\nabla w,\nabla\widehat{u})\,\zeta(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$. Отсюда, полагая $\zeta(x,z)=(\sigma_1(x)-\sigma_{1_k}(x))\,\sigma_0(z)$, получаем приведенное выше представление дифференциала Фреше.

Теперь минимизация функционала (3) при каждом $\alpha=\alpha_s$ осуществляется с помощью уравнения Эйлера, для которого формулируются естественные дополнительные условия: $\sigma_1'(0)=\sigma_1'(L)=0$ [12] и которое с помощью разностной аппроксимации сводится к системе линейных алгебраических уравнений, решаемой по стандартной программе для ЭВМ.

4. В проведенном математическом эксперименте по определению $\sigma_1(x)$ с помощью описанного в п. 3 алгоритма была выбрана трехслойная (по вертикали) модель среды, для которой $\sigma_0(z)$ соответствует работе [6].

«Наблюдения» импеданса соответствуют суточному диапазону частот: $\omega_k=0{,}628\cdot10^{-3}\cdot2^k$, $k=4, 5, ..., 11$. В качестве начального приближения к $\sigma_1(x)$ была выбрана константа, равная 1 и отклоняющаяся от решения на величину до 50%.

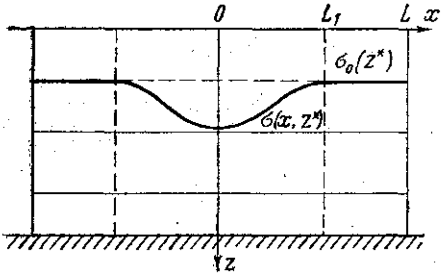

Рис. 1

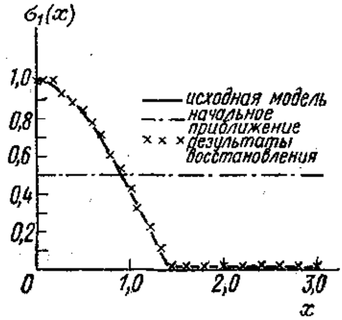

Рис. 2

Для расчета прямых эффектов (1) вертикальная граница $x=L$ выбрана «далекой» от области горизонтальной неоднородности (на расстоянии двух длин волн для нее). Сетка для разностной аппроксимации уравнения размером 23×10 неравномерна по x, при этом шаг возрастает к границе. Вариация шага, выбираемая с учетом размеров области и длины волны, а также требования квазилинейности поля в пределах шага, соответствует работе [6].

На рис. 1 представлена выбранная модель, на рис. 2 — найденная зависимость $\sigma_1(x)$ в сравнении с точной зависимостью и начальным приближением.

Результат свидетельствует об эффективности развиваемого алгоритма. Заметим, что рассмотренные постановки задачи и алгоритмы допускают распространение на случай горизонтально-однородных сред с кусочно-гладкими характеристиками [6].

В заключение авторы выражают благодарность А. Н. Тихонову и А. Г. Свешникову за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тихонов А. Н. ДАН СССР, 1950, 73, № 2, с. 295. [2] Cagniard L. Geophysics, 1953, 18, N 3, p. 605. [3] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. [4] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.; Наука, 1980, [5] Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. [6] Гласко В. Б., Кулик Н. И., Тихонов А. Н. ЖВМ и МФ, 1972, № 1, с. 139. [7] Дмитриев В. И., Барашков И. С. В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: НИВЦ МГУ, 1979, с. 38. [8] Дмитриев В. И., Мерщикова Н. А. В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: НИВЦ МГУ, 1979, с. 3. [9] Гусаров А. Л. В кн.: Математические модели задач геофизики. М.: НИВЦ

МГУ, 1981, с. 31. [10] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. [11] Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. [12] Тихонов А. Н., Гласко В. Б. ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 3, с. 463.

Поступила в редакцию
18.04.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 535.241.13:534

СКАНИРОВАНИЕ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В КРИСТАЛЛЕ ПАРАТЕЛЛУРИТА

З. Т. Азаматов, И. Б. Беликов, В. Б. Волошинов, Ф. Д. Маматджанов, В. Н. Парыгин

(кафедра физики колебаний)

Среди известных в настоящее время материалов кристаллы парателлурита отличаются высоким акустооптическим качеством [1—3]. Это делает кристаллы TeO_2 весьма перспективными для применения в устройствах управления оптическим излучением. Данная работа посвящена экспериментальному исследованию особенностей акустооптического взаимодействия в парателлурите. Для исследований выбрана геометрия рассеяния, когда сдвиговая акустическая волна распространяется вдоль направления [110] кристалла со смещением по направлению [$1\bar{1}0$], а плоскость акустооптического взаимодействия проходит через оптическую ось.

Акустооптическая ячейка представляла собой образец TeO_2 с размерами $1{,}2\times0{,}5\times0{,}75$ см вдоль направлений [110], [$1\bar{1}0$] и [001] соответственно. К кристаллу TeO_2 был прикреплен пьезоэлектрический преобразователь из ниобата лития X-среза. Технология изготовления преобразователя включала в себя напыление на звукопровод электрода из серебра, нанесение на парателлурит и ниобат лития связующих слоев из индия и вакуумную сварку заготовки преобразователя со звукопроводом. Заготовка преобразователя затем шлифовалась до толщины 74 мкм, соответствующей собственной частоте $f_п=32$ МГц, после чего на преобразователь напылялся верхний управляющий электрод. Общая толщина склейки не превышала 1,5 мкм. Геометрические размеры верхнего электрода составляли 0,7 см вдоль направления распространения света [001] и 0,2 см в перпендикулярном направлении.

Пьезопреобразователь возбуждал в звукопроводе акустическую волну сложной структуры. Качество сварки и параметры акустического столба оценивались оптическими методами. Диаметр светового луча при этом составлял 0,1 см. Эксперименты, проводившиеся при нескольких частотах ультразвука, показали, что расходимость акустического пучка в плоскости, перпендикулярной направлению [001], значительно превышала дифракционную. Это объясняется акустической анизотропией кристалла TeO_2 и качеством склейки преобразователя со звукопроводом. Однородность ультразвукового столба вдоль направления [001] оценивалась по диаграммам направленности. Значения эффективной длины взаимодействия света и ультразвука лежали в пределах $0{,}5\div0{,}7$ см, т. е. отличались от размера верхнего электрода преобразователя (0,7 см) не более чем на 30%. Однородность ультразвуко-