УДК 538.3:530.145

О ПОЛЕВОЙ АСИМПТОТИКЕ ВЕРШИННОЙ ФУНКЦИИ

Ю. М. Лоскутов, В. В. Скобелев

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Исследование асимптотических свойств диаграмм и операторов КЭД в сверхсильных магнитных полях $B \gg B_0$ ($B_0 = m^2/e_0 = 4{,}41 \cdot 10^{13}$ Гс) представляет принципиальный интерес как с точки зрения выяснения границ применимости теории возмущений, так и в астрофизическом аспекте. В ряде наших работ был развит метод расчета фейнмановских диаграмм в сверхсильных магнитных полях — «двумерное приближение» (ДП) КЭД. Расчет в основном порядке по заряду полевой асимптотики поляризационного оператора [1], массового оператора [2], вершинной функции [3] и радиационных поправок к ним [4—8] позволил установить, что фактический параметр разложения теории возмущений КЭД в полях с индукцией $B \gg B_0$ зависит от B и верхняя граница ее применимости лежит в области $B \sim 10^{17} \div 10^{18}$ Гс. По этой причине сделанные нами ранее оценки нейтринной светимости магнитных нейтронных звезд за счет различных механизмов генерации нейтринного излучения [9—12] ограничены указанными пределами. Выход за рамки этой области в определенной степени аналогичен принципам суммирования диаграмм КЭД в дважды логарифмической асимптотике по энергии. Так, в [13] нами было показано, что в достаточно узком (см. также [14]) диапазоне полей имеет место дважды логарифмическая асимптотика массового оператора по полю, а «истинная» асимптотика является однологарифмической [14], как и асимптотика поляризационного оператора. В соответствующих этим выводам рассуждениях предполагалось, что вкладом «одетой» вершины можно пренебречь по сравнению с вкладом «массовых» и «поляризационных» собственноэнергетических вставок во внутренние электронные и фотонные линии. В каждом отдельном порядке теории возмущений это может быть проверено непосредственным вычислением [4—8]. В данной заметке на примере суммирования лестничных вкладов в вершинную функцию мы распространяем соответствующую аргументацию и на асимптотические свойства операторов. А именно: ниже доказывается, что полевая асимптотика вершинных формфакторов содержит дополнительный малый параметр по сравнению, например, с асимптотикой массового оператора, которая в «однологарифмической» области имеет вид

$$M \approx m\left(\xi^{\frac{\alpha}{2\pi}\ln\frac{\pi}{\alpha}} - 1\right), \quad \xi = \frac{B}{B_0}. \tag{1}$$

Инвариантная структура вершинной функции $\widetilde{\Gamma}_\mu = \widetilde{\gamma_\mu} + \widetilde{\Lambda_\mu}$ в основном приближении теории возмущений в ДП КЭД на массовой поверхности определяется выражением

$$\widetilde{\Lambda}^\mu(k) = [f(t) - 1]\,\widetilde{\gamma}^\mu - \frac{1}{2m}\, g(t)\, \widetilde{\sigma}^{\mu\nu} k_\nu, \quad t = \frac{k^2}{m^2}, \tag{2}$$

где $\widetilde{\gamma}^\mu$ — двумерные в подпространстве (0, 3) матрицы (ось 3 параллельна постоянному и однородному магнитному полю),

$$\widetilde{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\gamma}^\mu \widetilde{\gamma}^\nu - \widetilde{\gamma}^\nu \widetilde{\gamma}^\mu\right).$$

«Двумерные» формфакторы $f(t)-1$ и $g(t)$ могут быть представлены в виде

$$f(t)-1=-\frac{\alpha}{\pi}\left\{\left(1+\frac{2\eta}{1-\eta^2}\ln\eta\right)\ln\frac{\lambda}{m}+\frac{\eta}{1-\eta^2}\left[\frac{1+\eta}{1-\eta}\ln^2\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\ln^2\eta-\int_0^{1-\eta}dx\,\frac{\ln(x+\eta)}{1-x}\right]\right\}, \qquad (3а)$$

$$g(t)=-\frac{\alpha}{\pi}\frac{2\eta}{1-\eta^2}\ln\eta\left\{\ln 2\xi-C-2\ln\frac{\lambda}{m}\right\},\quad t=-\frac{(1-\eta)^2}{\eta}<0. \qquad (3б)$$

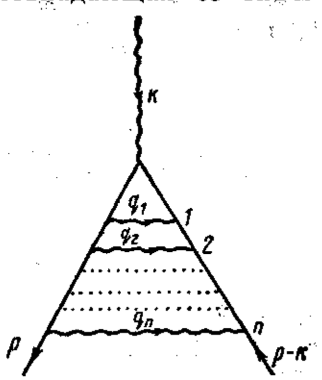
Здесь λ — инфракрасный параметр обрезания.

Отметим, что уже в основном порядке по α рост $\widetilde{\Lambda}^\mu$ по полю определяется логарифмическим вкладом $\ln 2\xi$ в формфактор $g(t)$, в то время как $f(t)-1$ асимптотически не зависит от поля. Как будет видно, и при суммировании диаграмм в логарифмической асимптотике основную роль играет формфактор $g(t)$.

Диаграмме лестничного типа в порядке n по α (рисунок) соответствует по правилам ДП КЭД матричный элемент вида ($\gamma=|eB|$)

$$\widetilde{\Lambda}^{(n)}_\mu=\left(-\frac{i\alpha}{4\pi^2}\right)^n\prod_{s=1}^{n}\left[\int_0^\infty dx_s\exp\left(-\frac{x_s}{2\gamma}\right)\right]\left[\int\frac{d^2q_s}{q_s^2-x_s-P_R(q_s^2)\exp(-x_s/2\gamma)}\right]\times$$
$$\times\left\{\widetilde{\gamma}_{\nu_n}\frac{\breve{p}+\breve{q}_n+m}{(p+q_n)^2-m^2}\widetilde{\gamma}_{\nu_{n-1}}\frac{\breve{p}+\breve{q}_n+\breve{q}_{n-1}+m}{(p+q_n+q_{n-1})^2-m^2}\widetilde{\gamma}_{\nu_{n-2}}\cdots\right.$$
$$\cdots\widetilde{\gamma}_{\nu_1}\frac{\breve{p}+\breve{q}_n+\ldots+\breve{q}_1+m}{(p+q_n+\ldots+q_1)^2-m^2}\widetilde{\gamma}_\mu\frac{\breve{p}-\breve{k}+\breve{q}_n+\ldots+\breve{q}_1+m}{(p-k+q_n+\ldots+q_1)^2-m^2}\widetilde{\gamma}^{\nu_1}\cdots \qquad (4)$$
$$\left.\cdots\widetilde{\gamma}^{\nu_{n-2}}\frac{\breve{p}-\breve{k}+\breve{q}_n+\breve{q}_{n-1}+m}{(p-k+q_n+q_{n-1})^2-m^2}\widetilde{\gamma}^{\nu_{n-1}}\frac{\breve{p}-\breve{k}+\breve{q}_n+m}{(p-k+q_n)^2-m^2}\widetilde{\gamma}^{\nu_n}\right\}.$$

Здесь p и q_s — 2-импульсы внешней электронной и внутренних «одетых» фотонных линий, $\breve{p}=\widetilde{\gamma}^0p_0+\widetilde{\gamma}^3p_3$, $P_R(q_s^2)$ — полевая асимптотика поляризационного оператора фотона в ДП, совпадающая со значением P_R в основном порядке теории возмущений [1, 14]. Вообще говоря, внутренние электронные линии также являются «одетыми», однако соответствующая модификация электронного пропагатора свелась бы к замене $m\to m^*=m+M$ [14] и, в силу малости M (формула (1)) в гигантском диапазоне полей, в пропагаторах и в $P_R(q_s{}^2)$ можно оставить «неперенормированную» массу m. В вершинах диаграммы оставлены «голые» матрицы $\widetilde{\gamma}$, поскольку вклад вершинных взаимодействий с радиационным полем в сверхсильных магнитных полях меньше собственноэнергетических вкладов. Аргументы в пользу последнего предположения следуют из тождества Уорда [14] и подтверждаются конечным результатом данной работы.



Вклад лестничных диаграмм порядка n по α в вершинную функцию

Для упрощения выражения (4) существенны два обстоятельства. Во-первых, экспоненциальный множитель $\exp(-x_s/2\gamma)$ фотонных пропагаторов в знаменателях может быть опущен, так как он играет роль лишь при $x_s \geqslant 2\gamma$, однако в этом случае $x_s \gg P_R(q_s^2)\exp(-x_s/2\gamma)$, а $P_R \sim \alpha\gamma$. Во-вторых, поскольку

$$\tilde{\gamma}_{\nu_1}(\check{p}+\check{q}_n+\ldots+\check{q}_1+m)\,\tilde{\gamma}_\mu(\check{p}-\check{k}+\check{q}_n+\ldots+\check{q}_1+m)\,\tilde{\gamma}^{\nu_1}=$$

$$=2m\,[2\,(p+q_n+\ldots+q_1)_\mu-\check{k}\tilde{\gamma}_\mu],$$

то интеграл по комбинации $(q_n+\ldots+q_1)$ сходится на массе, и если остальные интегралы приводят к логарифмической зависимости от поля, то в других пропагаторах этой комбинацией можно с логарифмической точностью пренебречь. В результате выражение (4) примет вид

$$\tilde{\Lambda}_\mu^{(n)}=\left(-\frac{i\alpha}{4\pi^2}\right)^n\int d^2q_1\ldots d^2q_{n-1}\prod_{s=1}^{n}\left[\int_0^\infty\frac{dx_s\exp(-x_s/2\gamma)}{q_s^2-x_s-P_R(q_s^2)}\right]_{q_n^2=(q_{n-1}+\ldots+q_1)^2}\times$$

$$\times\left\{\tilde{\gamma}_{\nu_n}\frac{\check{p}-\check{q}_{n-1}-\ldots-\check{q}_1+m}{(p-q_{n-1}-\ldots-q_1)^2-m^2}\tilde{\gamma}_{\nu_{n-1}}\frac{\check{p}-\check{q}_{n-2}-\ldots-\check{q}_1+m}{(p-q_{n-2}-\ldots-q_1)^2-m^2}\tilde{\gamma}_{\nu_{n-2}}\ldots\right.$$

$$\cdot\tilde{\gamma}_{\nu_2}\frac{\check{p}-\check{q}_1+m}{(p-q_1)^2-m^2}\left(2m\int d^2q_n\frac{2\,(p+q_n)_\mu-\check{k}\tilde{\gamma}_\mu}{[(p+q_n)^2-m^2]\,[(p-k+q_n)^2-m^2]}\right)\times$$

$$\times\frac{\check{p}-\check{k}-\check{q}_1+m}{(p-k-q_1)^2-m^2}\tilde{\gamma}^{\nu_2}\ldots\tilde{\gamma}^{\nu_{n-2}}\frac{\check{p}-\check{k}-\check{q}_{n-2}-\ldots-\check{q}_1+m}{(p-k-q_{n-2}-\ldots-q_1)^2-m^2}\times$$

$$\left.\times\tilde{\gamma}^{\nu_{n-1}}\frac{\check{p}-\check{k}-\check{q}_{n-1}-\ldots-\check{q}_1+m}{(p-k-q_{n-1}-\ldots-q_1)^2-m^2}\tilde{\gamma}^{\nu_n}\right\}. \qquad (5)$$

Так как

$$2m\int d^2q_n\frac{2\,(p+q_n)_\mu-\check{k}\tilde{\gamma}_\mu}{[(p+q_n)^2-m^2]\,[(p-k+q_n)^2-m^2]}=-\frac{4\pi i}{m}\,\frac{\eta\ln\eta}{1-\eta^2}\,\tilde{\sigma}_{\mu\nu}k^\nu, \qquad (6)$$

то лидирующий вклад в асимптотику $\tilde{\Lambda}_\mu^{(n)}$ будет давать формфактор $g(t)$. В рамках логарифмической точности по полю и в нерелятивистском приближении выражение (5) преобразуется (с учетом (6)) к виду (см. также [13])

$$\tilde{\Lambda}_\mu^{(n)}\approx-\frac{\alpha}{2\pi m}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\,\tilde{\sigma}_{\mu\nu}k^\nu\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{n-1}\left[\int_{\sim m^2}^{\infty}\frac{dq_s^2}{q_s^2}\int_0^{2\gamma}\frac{dx_s}{q_s^2+x_s+\varepsilon\gamma}\right]\int_0^{2\gamma}\frac{dx_n}{q_1^2+\ldots+q_{n-1}^2+x_n+\varepsilon\gamma}. \qquad (7)$$

Здесь положено $P_R(q_s^2)\approx\frac{2}{\pi}\alpha\gamma\equiv\varepsilon\gamma$, так как логарифмические вклады по полю в интегралы по q_s^2 и x_s «набираются» в области $q_s^2\geqslant m^2$, $x_s\sim\gamma\gg m^2$. Используя определение (2) и интегрируя (7) по x, получаем формфактор $g^{(n)}(0)$ в лестничном приближении:

$$g^{(n)}(0)\approx\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{n-1}\left[\int_{(1/\xi)}^{\infty}\frac{dy_s}{y_s}\ln\left(\frac{y_s+2}{y_s+\varepsilon}\right)\right]\ln\frac{y_1+\ldots+y_{n-1}+2}{y_1+\ldots+y_{n-1}+\varepsilon}. \qquad (8)$$

Для получения $g(0)=\sum_{n=1}^{\infty} g^{(n)}(0)$ в области сверхсильных полей $B \gg B_0/\varepsilon$ сведем задачу к решению дифференциального уравнения. Как легко убедиться, при $\xi \gg 1/\varepsilon$

$$\frac{dg^{(n)}}{d\xi} \approx \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{\xi} g^{(n-1)}. \tag{9}$$

Выполняя суммирование по n, находим

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{\pi}{\alpha} \frac{g}{\xi} + \frac{dg^{(1)}}{d\xi}. \tag{10}$$

Принимая во внимание, что $g^{(1)}$ в рассматриваемой асимптотике не зависит от поля, получаем

$$g = g^{(1)} \xi^{\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{\pi}{\alpha}}. \tag{11}$$

Значение $g^{(1)}$ легко получить из (8) для $n=1$:

$$g^{(1)} = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\pi}{\alpha}. \tag{12}$$

Таким образом, полевая асимптотика формфактора $g(0)$ в лестничном приближении имеет вид

$$g(0) = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\pi}{\alpha} \cdot \xi^{\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{\pi}{\alpha}}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что асимптотика вершинной функции содержит дополнительный малый параметр $\frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\pi}{\alpha}$ по сравнению с асимптотикой массового оператора (1) и поляризационного оператора, который растет линейно с полем [1, 14]. Это подтверждает справедливость высказанных ранее утверждений о малости вершинных вкладов. Вклад от диаграмм с перестановкой правых вершин (см. рисунок) по крайней мере не может превышать вклад лестничных диаграмм (см. также [3, 13]), оставляя в силе высказанное утверждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Скобелев В. В. Изв. вузов. Физика, 1975, № 10, с. 142. [2] Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1977, 18, № 6, с. 111. [3] Скобелев В. В. ЖЭТФ, 1977, 72, с. 1298. [4] Скобелев В. В. ЖЭТФ, 1977, 73, с. 1301. [5] Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. ТМФ, 1979, 38, с. 195. [6] Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1980, 21, № 4, с. 67. [7] Скобелев В. В. Изв. вузов. Физика, 1978, № 9, с. 126. [8] Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. ЖЭТФ, 1979, 77, с. 809. [9] Скобелев В. В. ЖЭТФ, 1976, 71, с. 1263. [10] Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. ТМФ, 1976, 29, с. 65. [11] Скобелев В. В. Астрофизика, 1979, 15, с. 503. [12] Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. Ядерная физика, 1980, 31, с. 1279. [13] Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. ТМФ, 1981, 48, с. 44. [14] Лоскутов Ю. М., Лысов Б. А., Скобелев В. В. ТМФ, 1982, 53, с. 339.

Поступила в редакцию
30.05.83