УДК 530.12

# НОВЫЙ КЛАСС СТАТИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ПРИ НАЛИЧИИ ВЕЩЕСТВА. I

**Ю. Н. Власенко, П. И. Пронин**

*(кафедра теоретической физики)*

1. Статические сферически-симметричные решения относятся к важнейшим решениям уравнений общей теории относительности. Получение любых решений уравнений Эйнштейна обычно затруднено еще в вакуумном случае, не говоря уже о случае наличия вещества. Нелинейный характер этих уравнений не позволяет записать общее решение для произвольного распределения плотности вещества $\rho(r)$ и давления $P(r)$ даже в квадратурах.

Существует ряд методов решений уравнений Эйнштейна. Первый метод предполагает задание определенного уравнения состояния либо явного вида компонент тензора энергии-импульса. Этим методом кроме статических сферически-симметричных решений уравнений ОТО был получен также ряд космологических решений [1]. Однако выбор определенного уравнения состояния очень жестко ограничивает физические свойства гравитирующих конфигураций и, кроме того, не позволяет получать новые аналитические решения.

В другом методе уравнение состояния задается в виде некоторой произвольной функции $f(r)$, явный вид которой находится из условия решений уравнений Эйнштейна в классе элементарных функций. Этим методом в работе [2] получен ряд интересных статических сферически-симметричных решений уравнений Эйнштейна.

Третий метод допускает наложение определенных связей на компоненты метрического тензора или задание явного вида одной из них. Конкретный вид связи определяется из условия разрешимости уравнений Эйнштейна [3].

Существует к тому же так называемый полуобратный метод. Он предполагает задание лишь наиболее общих физических свойств тензора энергии-импульса, предъявление определенных требований к самим решениям и, наконец, выяснение возможности удовлетворения уравнениям Эйнштейна при этих требованиях [4].

В данной работе получен класс сферически-симметричных статических решений уравнений Эйнштейна близким к полуобратному методом. Уравнение состояния не задается с самого начала, а получается как следствие теории.

2. Сферически-симметричная метрика статической конфигурации имеет вид [5]

$$ds^2=g_{00}dt^2-g_{11}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (1)$$

Однако для описания метода нам удобнее использовать координаты Эддингтона—Финкельстейна, в которых метрика (1) принимает следующую форму:

$$ds^2=g_{00}du^2+2g_{01}du dr-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2) \qquad (2)$$

и которые связаны с координатами кривизн (1) преобразованиями [6]

$$u=t-r^*,\ r^*=\int\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{00}}}\,dr. \qquad (3)$$

Здесь $u=t-r^*$ — запаздывающее время; $r$, $\theta$, $\varphi$ — радиальная и угловые координаты. Скорость света и постоянная тяготения Ньютона принимаются равными единице.

Не конкретизируя природы гравитирующей материи, мы потребуем лишь, чтобы тензор энергии-импульса был диагонален:

$$T_\mu^\nu=\mathrm{diag}\{\rho(r), -P(r), -P(r), -P(r)\}.$$

Для упрощения дальнейшей записи компонент метрического тензора введем обозначения: $g_{00}\equiv F(r)$, $g_{11}\equiv D(r)$, $g_{01}\equiv H(r)$. Тогда уравнения Эйнштейна в координатах (2) запишутся следующим образом:

$$\frac{F}{H^2}\frac{H'}{rH}=\frac{\varkappa}{2}(P(r)+\rho(r)), \tag{4а}$$

$$\frac{F}{H^2}\frac{H'}{rH}-\frac{1}{2H^2}\left[F''+\frac{2}{r}F'-F'\frac{H'}{H}\right]=-\varkappa P(r), \tag{4б}$$

$$\frac{F}{H^2}\frac{H'}{rH}-\frac{F}{H^2}\frac{1}{r^2}-\frac{F'}{H^2r}+\frac{1}{r^2}=-\frac{\varkappa}{2}(P(r)-\rho(r)), \tag{4в}$$

здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по $r$, а $\varkappa=8\pi$. Уравнения (4) содержат четыре неизвестные функции: $F(r)$, $H(r)$, $P(r)$, $\rho(r)$. В качестве дополнительного условия, позволяющего применить описанный выше метод, выберем следующее:

$$F/H^2=\varphi(r), \tag{5}$$

где $\varphi(r)$ — пока неизвестная произвольная функция. Это соотношение подсказывается, во-первых, видом уравнений (4), во-вторых, выбором координат Эддингтона—Финкельстейна. Кроме того, аналогичный вид связи приведен в работе [4].

Исключив из уравнений (4) зависимость от $P(r)$ и $\rho(r)$ и вводя обозначение

$$y(r)=rF'(r)/F(r), \tag{6}$$

с помощью дополнительного условия (5) мы получим для $y(r)$ общее уравнение Риккати

$$y'=f(r)y^2+g(r)y+h(r), \tag{7}$$

где

$$f(r)=-\frac{1}{2r},\quad g(r)=\frac{2}{r}-\frac{\varphi'}{2\varphi},\quad h(r)=\frac{2}{r}-\frac{\varphi'}{\varphi}-\frac{2}{r\varphi}.$$

Складывая уравнения (4а) и (4в), с учетом условия (5) получим плотность материи

$$\rho(r)=\frac{1}{\varkappa r^2}(1-r\varphi'-\varphi), \tag{8}$$

а из уравнения (4б), принимая во внимание (5), (6) и (7), определим давление

$$P(r)=-\frac{1}{\varkappa r^2}(1-y(r)\varphi-\varphi). \tag{9}$$

Таким образом, следуя такому методу разрешения уравнений Эйнштейна, нам удалось выразить плотность $\rho(r)$, давление $P(r)$ и соответствующие компоненты метрики $F(r)$ и $H(r)$ гравитирующей материальной сферы через решение общего уравнения Риккати $y(r)$ и некоторую произвольную функцию $\varphi(r)$.

3. Уравнение (7) в общем случае неинтегрируемо. Однако в ряде частных случаев оно имеет аналитическое решение, а именно если задана связь между функциями $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$ или наложено какое-либо ограничение на одну из них [7].

Приведем здесь некоторые из этих случаев. Условие существования аналитического решения уравнения Риккати приводит к определенным уравнениям для функции $\varphi(r)$, что позволяет отыскать ее явный вид. Это, в свою очередь, определяет явный вид $y(r)$. Выпишем сейчас некоторые решения, для которых плотность вещества в центре положительна:

$$\rho(0)>0, \tag{10}$$

а распределение плотности не возрастает при увеличении радиуса:

$$\rho'(r)\leqslant 0. \tag{11}$$

А. $h(r)=0$ [7]. (12)

Это условие приводит к уравнению

$$\varphi'-2r^{-1}\varphi=-2r^{-1},$$

общее решение которого с учетом (10) запишем в виде

$$\varphi(r)=1-A_1r^2, \tag{13}$$

где $A_1>0$ — постоянная интегрирования.

Из выражения (8) с помощью (13) получим плотность материи

$$\rho(r)=\frac{3A_1}{\varkappa}\equiv\rho_0. \tag{14}$$

Решение уравнения Риккати в данном случае:

$$y(r)=2A_1r^2\{\sqrt{\varphi(r)}(B_1-\sqrt{\varphi(r)})\}^{-1}, \tag{15}$$

где $\varphi(r)$ определяется из формулы (13), а $B_1$ — новая постоянная интегрирования. Подставляя (15) и (13) в (9), найдем давление

$$P(r)=\rho_0\left(\sqrt{1-A_1r^2}-\frac{1}{3}B_1\right)(B_1-\sqrt{1-A_1r^2})^{-1}, \tag{16}$$

а искомые компоненты метрики определим с помощью формулы (6) и дополнительного условия (5):

$$F(r)=\exp\left\{\int\frac{y(r)}{r}dr\right\}=F_1^2(B_1-\sqrt{1-A_1r^2})^2, \tag{17}$$

$$H(r)=\sqrt{\frac{F(r)}{\varphi(r)}}=F_1(B_1-\sqrt{1-A_1r^2})(1-A_1r^2)^{-1/2}, \tag{18}$$

где $F_1$ — константа интегрирования.

Б. $h(r)=C_0^2f(r)\exp\left(2\int g(r)\,dr\right)$. (19)

В этом случае уравнение для $\varphi(r)$ имеет следующий вид:

$$\varphi'-2r^{-1}\varphi=\frac{C_0^2}{2}r^3-2r^{-1}.$$

Выпишем общее решение этого уравнения:

$$\varphi(r)=\frac{C_0^2}{4}r^4+Kr^2+1, \tag{20}$$

где $C_0$ — константа из условия (19), а $K$ — постоянная интегрирования. Условие (19) тождественно выполняется как для $K=C_0$, так и для $K\neq C_0$, что приводит к различным решениям уравнения Риккати $y(r)$, зависящим от различных $\varphi(r)$.

При $K=C_0$ общее решение (20) представим следующим образом:

$$\varphi(r)=1-2A_2r^2+A_2^2r^4=(1-A_2r^2)^2, \quad (21)$$

где постоянная $A_2\equiv -C_0/2>0$ выбирается положительной, чтобы выполнялось условие (10). Подставив это соотношение в (8), получим

$$\rho(r)=\frac{6A_2}{\varkappa}\left[1-\frac{5}{6}A_2r^2\right]. \quad (22)$$

Уравнение Риккати в данном случае имеет два решения в зависимости от знака произведения $fh$ [7].

Для $K=C_0$

$$fh=A_2^2r^2\varphi^{-1}>0, \quad (23а)$$

$$h/f=4A_2^2r^4\varphi^{-1}>0, \quad (23б)$$

и это решение дается формулой

$$y(r)=\frac{2A_2r^2}{\sqrt{\varphi(r)}}\operatorname{tg}\left(\int\frac{A_2r}{\sqrt{\varphi(r)}}dr+C\right)=2rZ'(r)\operatorname{tg}Z(r), \quad (24)$$

где $\varphi(r)$ определяется соотношением (21), а через $Z(r)$ обозначена следующая функция:

$$Z(r)=\int\sqrt{fh}\,dr+C. \quad (25)$$

Из уравнения (9) выразим давление через эту функцию:

$$P(r)=\frac{2A_2}{\varkappa}\left[-1+\frac{A_2}{2}r^2+\sqrt{\varphi(r)}\operatorname{tg}Z(r)\right], \quad (26)$$

а из уравнений (6) и (5) — компоненты метрики:

$$F(r)=\exp\left(2\int\operatorname{tg}Z(r)\,dZ\right)=F_2^2\cos^{-2}Z(r), \quad (27)$$

$$H(r)=\sqrt{\frac{F(r)}{\varphi(r)}}=F_2\{\cos Z(r)(1-A_2r^2)\}^{-1}, \quad (28)$$

где $F_2$ — постоянная интегрирования.

Явная зависимость $Z(r)$ находится из уравнений (25), (22) и (21):

$$Z(r)=\int\sqrt{fh}\,dr+C=\ln[C_2(1-A_2r^2)^{1/2}],$$

$C_2\equiv e^C$ — константа интегрирования.

При $K\neq C_0$ общее решение (20) можно записать в такой форме:

$$\varphi(r)=1-A_3r^2+B_3^2r^4,$$

где введены обозначения $A_3=-K>0$, $B_3=-C_0/2>0$, а знаки выбраны с учетом условия (10).

Для этого случая

$$fh=B_3^2r^2\varphi^{-1},$$

$$fh^{-1}=(4B_3^2r^4\varphi^{-1})^{-1},$$

откуда $fh>0$ при условии, что $\varphi(r)>0$; $fh<0$, если $\varphi(r)<0$. Это означает, что уравнение Риккати имеет два решения в зависимости от знака функции $\varphi(r)$. Подробный анализ этого случая, а также разбор других решений уравнения (7), удовлетворяющих физическим требованиям (10) и (11), мы приведем позже.

Используя формулы преобразования (3) от координат Эддингтона—Финкельстейна (2) к координатам кривизн (1), легко показать, что полученные решения $g_{00} \equiv F(r)$ и $g_{01} \equiv H(r)$ в координатах (1) можно записать так:

$$g_{00}(r) = F(r), \tag{29а}$$

$$g_{11} \equiv D(r) = \varphi^{-1}(r), \quad g_{01}(r) = 0. \tag{29б}$$

Учитывая это замечание, из формул (13), (14), (16) и (17) видим, что первое наше решение (обозначенное у констант индексом 1) полностью совпадает с внутренним решением Шварцшильда [8].

Определение постоянных интегрирования, физический анализ и интерпретация полученных результатов будут сделаны в наших следующих работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мёллер К. Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975. [2] Коркина М. П., Капитонов А. Г. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 11. М.: Атомиздат, 1980, с. 125—131. [3] Tolman R. C. Phys. Rev., 1939, 55, p. 364. [4] Зельманов А. Л. Докт. дис. в форме науч. докл. М., 1982, с. 17—23. [5] Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974. [6] Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977, с. 167—180. [7] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976, с. 41—44. [8] Синг Дж. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963, с. 244—248.

Поступила в редакцию
31.05.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1984, т. 25, № 1

УДК 539.12

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В КВАНТОВАННОЙ ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ ВОЛНЕ

**В. Р. Халилов, В. К. Перес-Фернандес**

*(кафедра теоретической физики)*

Точные решения уравнений классической теории поля играют исключительно важную роль при изучении различного рода физических моделей. В частности, большое значение для понимания процесса $\pi$-конденсации играет известная точно решаемая модель $\pi$-конденсации, в которой классическое поле $\pi$-конденсата выбирается в виде бегущей волны [1].

Недавно в работе [2] изящным методом были заново получены точные решения, описывающие состояния нуклонов ($p$, $n$) во внешнем поле конденсата, имеющего вид

$$\mathbf{\Phi} = \{\Phi_1(x_\mu), \Phi_2(x_\mu), \Phi_3(x_\mu)\} = \Phi\{\cos k_\mu x^\mu, \sin k_\mu x^\mu, 0\}. \tag{1}$$

В настоящей работе мы покажем, что при некоторых предположениях задача решается точно и в том случае, когда помимо конденсата имеется и квантованное поле $\pi$-мезонов.

Уравнение Дирака, описывающее движение нуклонов (протона и нейтрона) в векторном поле $\mathbf{\Phi}$ ($\mathbf{\Phi}$ — трехмерный вектор в пространстве изотопического спина) с псевдоскалярной связью, имеет вид

$$\{\gamma^\mu \partial_\mu + m - ig\gamma^5 (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{\Phi})\}\Psi = 0. \tag{2}$$