других решений уравнения (7), удовлетворяющих физическим требованиям (10) и (11), мы приведем позже.

Используя формулы преобразования (3) от координат Эддингтона—Финкельстейна (2) к координатам кривизн (1), легко показать, что полученные решения $g_{00} \equiv F(r)$ и $g_{01} \equiv H(r)$ в координатах (1) можно записать так:

$$g_{00}(r) = F(r), \tag{29а}$$

$$g_{11} \equiv D(r) = \varphi^{-1}(r), \quad g_{01}(r) = 0. \tag{29б}$$

Учитывая это замечание, из формул (13), (14), (16) и (17) видим, что первое наше решение (обозначенное у констант индексом 1) полностью совпадает с внутренним решением Шварцшильда [8].

Определение постоянных интегрирования, физический анализ и интерпретация полученных результатов будут сделаны в наших следующих работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мёллер К. Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975. [2] Коркина М. П., Капитонов А. Г. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 11. М.: Атомиздат, 1980, с. 125—131. [3] Tolman R. C. Phys. Rev., 1939, 55, p. 364. [4] Зельманов А. Л. Докт. дис. в форме науч. докл. М., 1982, с. 17—23. [5] Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974. [6] Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977, с. 167—180. [7] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976, с. 41—44. [8] Синг Дж. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963, с. 244—248.

Поступила в редакцию
31.05.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1984, т. 25, № 1

УДК 539.12

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В КВАНТОВАННОЙ ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ ВОЛНЕ

В. Р. Халилов, В. К. Перес-Фернандес

(кафедра теоретической физики)

Точные решения уравнений классической теории поля играют исключительно важную роль при изучении различного рода физических моделей. В частности, большое значение для понимания процесса π-конденсации играет известная точно решаемая модель π-конденсации, в которой классическое поле π-конденсата выбирается в виде бегущей волны [1].

Недавно в работе [2] изящным методом были заново получены точные решения, описывающие состояния нуклонов (p, n) во внешнем поле конденсата, имеющего вид

$$\mathbf{\Phi} = \{\Phi_1(x_\mu),\ \Phi_2(x_\mu),\ \Phi_3(x_\mu)\} = \Phi\{\cos k_\mu x^\mu,\ \sin k_\mu x^\mu,\ 0\}. \tag{1}$$

В настоящей работе мы покажем, что при некоторых предположениях задача решается точно и в том случае, когда помимо конденсата имеется и квантованное поле π-мезонов.

Уравнение Дирака, описывающее движение нуклонов (протона и нейтрона) в векторном поле $\mathbf{\Phi}$ ($\mathbf{\Phi}$ — трехмерный вектор в пространстве изотопического спина) с псевдоскалярной связью, имеет вид

$$\{\gamma^\mu \partial_\mu + m - ig\gamma^5 (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{\Phi})\}\Psi = 0. \tag{2}$$

Здесь $\Psi = (\Psi_p, \Psi_n)$ — нуклонная волновая функция, представляющая собой восьмикомпонентный спинор, четыре первые компоненты которого соответствуют протонному спинору, а четыре нижние — нейтронному, $\boldsymbol{\tau}$ — матрицы Паули:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

действующие в пространстве изотопического спина, γ^5 — матрица Дирака, g — константа взаимодействия, m — масса нуклона.

Поле $\boldsymbol{\Phi}$ выберем в виде

$$\boldsymbol{\Phi} = \{a^+ e^{-ik_\mu x^\mu} + a e^{ik_\mu x^\mu},\ i a^+ e^{-ik_\mu x^\mu} - i a e^{ik_\mu x^\mu},\ 0\}, \tag{3}$$

где a, a^+ — операторы уничтожения и рождения соответствующих частиц, действующие в пространстве чисел заполнения.

Подставим (3) в (2) и воспользуемся хорошо известным приемом, а именно: перейдем к новой нуклонной функции Ψ' согласно преобразованию

$$\Psi = \exp\left(-i \frac{\tau_3}{2} k_\mu x^\mu\right) \Psi'. \tag{4}$$

Тогда для Ψ' получим уравнение

$$\left\{\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{\tau_3}{2} k_\mu\right) + m - ig\gamma^5 (2a^+\tau_+ + 2a\tau_-)\right\} \Psi' = 0. \tag{5}$$

В (5) мы ввели операторы проектирования [3]

$$\tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, a^+ имеет смысл оператора рождения π^--мезона в состоянии с энергией $k^0 = \omega$ и импульсом $\mathbf{k}$ или оператора поглощения начального π^+-мезона в состоянии с энергией $k^0 = \omega$ и импульсом $-\mathbf{k}$, а a — оператор поглощения начального π^--мезона, находящегося в том же энергетическом состоянии. Если кроме квантованного поля π^--мезонов имеется конденсат (1), то уравнение (5) приобретает вид

$$\left\{\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{\tau_3}{2} k_\mu\right) + m - ig\gamma^5 (a_1 + \tau_1 \Phi)\right\} \Psi' = 0, \tag{6}$$

где через a_1 мы обозначили матрицу

$$a_1 = 2(\tau_+ a^+ + \tau_- a) = \begin{pmatrix} 0 & a^+ \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, полагая

$$\Psi = \exp(ip_\mu x^\mu) U; \quad U = \begin{pmatrix} U_p \\ U_n \end{pmatrix},$$

где U — постоянный восьмикомпонентный спинор, вместо (6) получим алгебраическую систему уравнений

$$\left\{i\gamma^\mu \left(p_\mu - \frac{\tau_3}{2} k_\mu\right) + m - ig\gamma^5 (a_1 + \tau_1 \Phi)\right\} U = 0. \tag{7}$$

В изоспиновом пространстве U является спинором:

$$U = \begin{pmatrix} U_p\left(p_\mu - \dfrac{k_\mu}{2}\right) \\ U_n\left(p_\mu + \dfrac{k_\mu}{2}\right) \end{pmatrix},$$

где $U_p(p_\mu)$, $U_n(p_\mu)$ — спиноры, описывающие состояния обычных протона и нейтрона с 4-импульсом p_μ.

Уравнения (7) упрощаются после преобразования, предложенного в [2], которое справедливо при условии $k_\mu k^\mu=0$ (условие $k_\mu k^\mu=0$ соответствует нулевой массе покоя мезонов, как образующих конденсат, так и являющихся квантами мезонного поля):

$$u = Su;\; S = 1 - \frac{g\gamma^5}{2(p\cdot k)}(\tau_1\Phi + a_1)\gamma^\mu k_\mu. \tag{8}$$

Обратим внимание на то, что в (1) и (3) входит один и тот же 4-вектор k_μ.

Подставляя (8) в (7), получим

$$\left\{i\widehat{Q} + m - \frac{g}{2(p\cdot k)}(\tau_1\Phi + a_1)\widehat{k}(i\widehat{p} + m)\right\}u = 0, \tag{9}$$

где

$$Q_\mu = p_\mu + \left[\frac{g^2}{2(p\cdot k)}(\Phi^2 + \Phi(\tau_1 a_1 + a_1\tau_1) + a_1 a_1) - \frac{\tau_3}{2}\right]k_\mu, \tag{10}$$

$$\widehat{Q} = \gamma^\mu Q_\mu;\; \widehat{k} = \gamma^\mu k_\mu;\; \widehat{p} = \gamma^\mu k_\mu.$$

Наконец, учитывая условие $\widehat{k}\cdot\widehat{k}=0$, (9) легко привести к виду

$$\left(1 - \frac{g\gamma^5}{2(p\cdot k)}(\tau_1\Phi + a_1)\widehat{k}\right)(i\widehat{Q} + m)u = 0. \tag{11}$$

Если в выражении (10) формально положить $a_1=0$, то оно перейдет в уравнения, полученные в работе [2]. В случае, рассматриваемом здесь, в Q_μ входят операторы a и a^+, действующие в пространстве чисел заполнения. Преобразуем эту часть Q_μ:

$$F = \frac{g^2}{2(p\cdot k)}\left[\Phi^2 + \Phi\begin{pmatrix} a + a^+ & 0 \\ 0 & a + a^+\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^+a & 0 \\ 0 & aa^+\end{pmatrix}\right] - \frac{\tau_3}{2}.$$

Операторы a и a^+ можно выбрать нормированными: $a = \widetilde{a}/\sqrt{2k^0V}$ где $k^0=\omega$ — энергия кванта, V — объем, а $\widetilde{a}^+\widetilde{a}$ имеет смысл среднего числа частиц с данной энергией и импульсом.

Операторы $\widetilde{a}$ и $\widetilde{a}^+$ подчиняются обычным коммутационным соотношениям:

$$\widetilde{a}\widetilde{a}^+ - \widetilde{a}^+\widetilde{a} = 1;$$

их можно записать в координатном представлении в следующем виде:

$$\widetilde{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta - \frac{\partial}{\partial\eta}\right);\; \widetilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta + \frac{\partial}{\partial\eta}\right). \tag{12}$$

С учетом нормировки операторов и их явного вида (12) для F имеем:

$$F = \frac{g^2}{2(p\cdot k)(2k^0V)}\left[\Phi^2(2k^0V) + \sqrt{2k^0V}\,\Phi\begin{pmatrix}\widetilde{a} + \widetilde{a}^+ & 0 \\ 0 & \widetilde{a} + \widetilde{a}^+\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{a}^+\widetilde{a} & 0 \\ 0 & \widetilde{a}\widetilde{a}^+\end{pmatrix}\right] -$$

$$- \frac{\tau_3}{2} = \frac{g^2}{2(p\cdot k)(2k^0V)}\left[\Phi^2(2k^0V) + 2\sqrt{k^0V}\,\Phi\eta\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{a}^+\widetilde{a} & 0 \\ 0 & \widetilde{a}\widetilde{a}^+\end{pmatrix}\right] - \frac{\tau_3}{2}. \tag{13}$$

Сдвигая в (13) координату η согласно правилу

$$\eta' = \eta + 2\sqrt{k^0V}\,\Phi, \tag{14}$$

находим

$$F = \frac{g^2}{2(p\cdot k)(2k^0V)}\begin{pmatrix}\tilde{a}^{+\prime}\tilde{a}' & 0\\ 0 & \tilde{a}'\tilde{a}^{+\prime}\end{pmatrix} - \frac{\tau_3}{2},$$

где

$$\tilde{a}^{+\prime} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta' - \frac{\partial}{\partial\eta'}\right),\ \tilde{a}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta' + \frac{\partial}{\partial\eta'}\right).$$

Таким образом, мы приходим к уравнению, записанному в терминах сдвинутых (относительно конденсата) операторов. Операторы $\tilde{a}^{+\prime}$ и $\tilde{a}'$ описывают рождение и уничтожение квантовых возбуждений новых π^--мезонов, отличающихся от введенных ранее с помощью операторов a^+ и a тем, что энергия этих (новых) возбуждений отсчитывается от энергии конденсата, а не от нулевого уровня, как это имело место для старых возбуждений.

Возвращаясь к уравнению (11), легко видеть, что его решения в общем случае действия на «нуклоны» полей (1) и (3) можно записать в виде

$$u = F_{\tilde{n}}(\eta')\begin{pmatrix}u_p\\ u_n\end{pmatrix}.$$

Здесь $F_{\tilde{n}}(\eta')$ — нормированная на единицу функция

$$F_{\tilde{n}}(\eta') = \left(\sqrt{\pi}\,\tilde{n}!\,2^{\tilde{n}}\right)^{-1/2} e^{-\eta'^2/2} H_{\tilde{n}}(\eta'),$$

$H_{\tilde{n}}(\eta')$ — полином Эрмита, а четырехкомпонентные спиноры u_p, u_n удовлетворяют обычному уравнению Дирака

$$(i\hat{Q} + m)\begin{pmatrix}u_p\\ u_n\end{pmatrix} = 0, \tag{15}$$

причем

$$Q_\mu = p_\mu + \left[\frac{g^2}{2(p\cdot k)(2k^0V)}\begin{pmatrix}\tilde{n} & 0\\ 0 & \tilde{n}+1\end{pmatrix} - \frac{\tau_3}{2}\right]k_\mu.$$

Подчеркнем здесь, что «нуклоны», описываемые спинором U, являются линейными комбинациями состояний u_p и u_n.

Сдвиг координаты η, очевидно, эквивалентен сдвигу операторов

$$\tilde{a}^{+\prime} = \tilde{a}^+ + \sqrt{2k^0V}\,\Phi;\ \tilde{a}' = \tilde{a} + \sqrt{2k^0V}\,\Phi. \tag{16}$$

Состояние $F_0(\eta')$, уничтожаемое оператором $\tilde{a}'$, является новым вакуумом **Ф**-поля с учетом сдвига. Старое вакуумное состояние **Ф**-поля описывается функцией $F_0(\eta)$; для нее оператором уничтожения является оператор $\tilde{a}$.

Практическое значение этих операторов следующее. Допустим, нам нужно вычислить 4-вектор импульса p_μ состояния $F_k(\eta)$. Вероятность того, что в то же время система находится в состоянии $F_n(\eta')$, определяется формулой (см., например, [4])

$$W_{nk} = \left|\int_{-\infty}^{\infty} F_k(\eta)F_n(\eta')\,d\eta\right|^2 = I_{n,k}^2\left(\frac{b^2}{2}\right),\ n > k,$$

где

$$I_{n,k} = (n!\,k!)^{-1/2} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\frac{n-k}{2}} Q_k^{n-k}(\rho),$$

$$Q_s^l = e^{\rho}\rho^{-l}\frac{d^s}{d\rho^s}(\rho^{s+l}e^{-\rho})$$

— полином Лагерра. Заметим, что при $k=0$

$$I_{n,0}^2 = e^{-\rho}\rho^n/n!,$$

так что как функция числа n вероятность представляет собой распределение Пуассона со средним значением

$$\rho = b^2/2 = 2k^0 V\Phi^2. \tag{17}$$

Следовательно, вектор Q_μ в состоянии, в котором нет квантовых возбуждений, т. е. $k=0$, определяется формулой

$$Q_\mu = p_\mu + \left[\frac{g^2}{2(p\cdot k)}\begin{pmatrix}\Phi^2 & 0\\ 0 & \Phi^2+1/(2k^0V)\end{pmatrix} - \frac{\tau_3}{2}\right]k_\mu.$$

Отметим, что в этом состоянии имеются новые квантовые возбуждения, которые описываются функцией $F_n(\eta')$. Аналогично можно найти Q_μ для случая $k\neq 0$.

Так как $Q_\mu Q^\mu = -m^2$, то энергия нуклона $u_{p,n}$ в состоянии с $k=0$ определяется из формулы

$$p^2 + \begin{pmatrix}g^2\Phi^2 & 0\\ 0 & g^2[\Phi^2+1/(2k^0V)]\end{pmatrix} + \tau_3(p\cdot k) = -m^2$$

или

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 + \begin{pmatrix}g^2\Phi^2 & 0\\ 0 & g^2[\Phi^2+1/(2k^0V)]\end{pmatrix} \pm (p\cdot k).$$

В частности, при $\mathbf{p}=0$ «энергия» нуклона в такой среде в состоянии u_p равна

$$p_0 = -\frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + m^2 + g^2\Phi^2}, \tag{18}$$

а «энергия» нуклона в состоянии u_n равна

$$p_0 = \frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + m^2 + g^2[\Phi^2 + 1/(2k^0V)]} \tag{19}$$

(здесь $k^0=\omega$), что согласуется с формулами, приведенными в [1]. Заметим, что конденсатное поле (1) в рассмотренном нами случае соответствует распределению, при котором все π^--мезоны находятся в одном состоянии с энергией ω, а все π^+-мезоны — в состоянии с энергией $-\omega$.

Значения p_0, определяемые формулами (18), (19), получены из условия существования нетривиальных решений системы (15), т. е. из условия

$$\det(i\hat{Q}+m) = 0.$$

Спиноры u_p, u_n удовлетворяют уравнению Дирака для свободных частиц и зависят от вектора Q_μ: $u_p(Q_\mu)$, $u_n(Q_\mu)$.

Однако нуклонные состояния в терминах обычных нуклонов описываются спинором U. Рассмотрим эти состояния в случае, когда нуклоны находятся только в поле конденсата, а квантовые возбуждения π-мезонов можно не учитывать. Тогда нуклонная волновая функция приобретает вид

$$U = \begin{pmatrix} U_p \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_p(Q) - \dfrac{g\Phi}{2(Q\cdot k)} \gamma^5 \hat{k} u_n(Q) \\ u_n(Q) - \dfrac{g\Phi}{2(Q\cdot k)} \gamma^5 \hat{k} u_p(Q) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Здесь мы учли, что $(p\cdot k) = (Q\cdot k)$.

Для описания состояния нуклонов удобно ввести 4-векторы

$$q_\mu(1, 2) = p_\mu \mp \frac{k_\mu}{2} \equiv Q_\mu - \frac{g^2\Phi^2}{2(Q\cdot k)} k_\mu.$$

Квадраты «длин» этих векторов одинаковы:

$$q_\mu(1, 2)\, q^\mu(1, 2) = Q_\mu Q^\mu - g^2\Phi^2 = -m^2(1 + g^2\Phi^2/m^2),$$

что дает

$$q_0^2(1,\ 2) = m^2(1 + g^2\Phi^2/m^2) + \mathbf{q}^2(1,\ 2). \tag{21}$$

В заключение приведем выражение для p_0 без учета вклада квантовых возбуждений π-мезонов, но при произвольных значениях вектора $\mathbf{p}$:

$$p_0 = \mp \frac{\omega}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\omega^2 + 4(m^2 + \mathbf{p}^2 + g^2\Phi^2) \pm 4|p|\,\omega\cos\theta},$$

где θ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мигдал А. Б. Фермионы и бозоны в сильных полях. М.: Наука, 1978. [2] Qi-ren Zhang. Phys. Zett., 1981, **104 B**, N 5, p. 347. [3] Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1978. [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию
01.06.83