буждения параметрических колебаний различной формы. При этом условия возбуждения определяются не только соотношениями между параметрами контура и частотой их модуляции [3], но и соотношениями между этими параметрами и длительностями их пребывания в стационарных состояниях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мигулин В. В. и др. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. [2] Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. М.: Сов. радио, 1966. [3] Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1947, с. 90.

Поступила в редакцию
26.01.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 621.373.7

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В КОНТУРЕ СО СКАЧКООБРАЗНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ЕМКОСТИ

В. П. Комолов, Д. А. Тищенко, П. Н. Шашков

(кафедра радиофизики СВЧ)

Известно, что скачкообразный закон изменения емкости C колебательного контура при заданной глубине модуляции $m=(C_{max}-C_{min})/(C_{max}+C_{min})$ является оптимальным в смысле внесения энергии в контур [1]. При такой модуляции емкость принимает значения $C_\alpha=C_{max}$ на интервалах времени T_α и $C_\beta=C_{min}$ на интервалах T_β. Период модуляции $T_M=T_\alpha+T_\beta$. Области возбуждения колебаний в случае малой глубины модуляции ($m\ll 1$) и симметричного модулирующего воздействия ($T_\alpha=T_\beta$) рассмотрены в [2] и близки к областям неустойчивости решений уравнения Матье [3]. Однако с увеличением m экспериментально наблюдается расщепление областей возбуждения, причем при фиксированном m возбуждение зависит не только от частоты модуляции, но и от соотношения между T_α и T_β.

Экспериментальное исследование проводилось на балансном параметрическом контуре с прямоугольной видеоимпульсной накачкой. Собственная частота контура на интервалах времени T_α оставалась постоянной: $f_\alpha=200$ кГц, а на интервалах T_β принимала значения $f_\beta=200\div400$ кГц в зависимости от глубины модуляции емкости $m=0\div0{,}6$. Время переключения емкости не превышало 3 нс, т. е. $\sim10^{-4}$ периода колебаний на верхней частоте; такую модуляцию емкости можно считать скачкообразной.

Рассмотрим области возбуждения для $m<1$*. Уравнение для заряда q в контуре со скачкообразной модуляцией емкости имеет вид

$$\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_0^2(t)q=0, \quad (1)$$

где $\delta=R/(2L)$, $\omega_0^2(t)$ — периодическая функция, принимающая значения $\omega^2_{0\alpha}=(LC_\alpha)^{-1}$ на интервалах времени T_α и $\omega^2_{0\beta}=(LC_\beta)^{-1}$ на интервалах T_β; L, R — индуктивность и сопротивление контура соответственно. Подстановкой $q=x\exp(-\delta t)$ уравнение (1) преобразуется к уравнению Хилла:

$$\ddot{x}+\omega^2(t)x=0, \quad (2)$$

* При $m\geqslant1$ величина емкости выходит из области положительных значений.

где $\omega^2(t)$ принимает значения $\omega_\alpha^2=\omega_{0\alpha}^2-\delta^2$, $\omega_\beta^2=\omega_{0\beta}^2-\delta^2$ на интервалах T_α и T_β соответственно. Решение уравнения (2) можно представить, согласно Флоке [4], в виде

$$x=a\chi(t)\exp(ht)+b\chi(-t)\exp(-ht), \quad (3)$$

где $\chi(t)$ — ограниченная функция с периодом $T_\text{М}$, h — характеристический показатель уравнения (2), a, b — константы. Из (3) следует, что решение исходного уравнения (1) при $|\text{Re}\,h|>\delta$ будет неустойчивым (с возрастающей амплитудой), при $|\text{Re}\,h|<\delta$ — затухающим. Границы областей возбуждения определяются условием $|\text{Re}\,h|=\delta$. Воспользовавшись методом нахождения характеристических показателей уравнения Хилла со скачкообразной модуляцией параметров, предложенным Мейснером [5], для $Y=\exp(hT_\text{М})$ получим уравнение

$$Y^2-2YP+1=0, \quad (4)$$

где

$$P=\cos\omega_\alpha T_\alpha\cos\omega_\beta T_\beta-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_\beta}+\frac{\omega_\beta}{\omega_\alpha}\right)\sin\omega_\alpha T_\alpha\sin\omega_\beta T_\beta.$$

Так как $\exp(\delta T_M)\geqslant 1$, то в областях неустойчивости и на их границах корни уравнения (4) будут действительными. Подстановкой $Y=\exp(\pm\delta T_\text{М})$ в (4) получим соотношение, определяющее границы областей возбуждения:

$$P=\pm\operatorname{ch}\delta T_\text{М}. \quad (5)$$

На рис. 1 показаны граничные поверхности для реального контура с $\delta=3\cdot10^4$ с$^{-1}$, построенные в соответствии с соотношением (5) в координатах θ_α, θ_β, m, где $\theta_\alpha=\omega_\alpha T_\alpha$, $\theta_\beta=\omega_\beta T_\beta$ — фазовые набеги колебаний на интервалах времени T_α и T_β соответственно. Сечение полученной фигуры плоскостью $m=\text{const}$ определяет все возможные области возбуждения при заданной глубине модуляции. Так, для $m=0{,}07$ их число равно 6. На рис. 2, *а* показаны теоретические границы областей возбуждения при отсутствии затухания для $m=0{,}07$, для этого же значения m на рис. 2, *б* показаны области возбуждения, полученные экспериментально при $\delta=3\cdot10^4$ с$^{-1}$. Как видно из рис. 1, с ростом m области возбуждения расширяются и число их увеличивается. При $m=0{,}6$ экспериментально наблюдалось 65 областей, расположенных вдоль прямых

$$\theta_\alpha+\theta_\beta=n\pi, \quad (6)$$

где $n=1, 2, 3, \ldots$ Для четных n эти области ограничены поверхностями $P=\operatorname{ch}(\delta T_\text{М})$, для нечетных n — поверхностями $P=-\operatorname{ch}(\delta T_\text{М})$.

При отсутствии затухания вдоль каждой прямой (6) расположено n соприкасающихся областей, которые образуют непрерывную зону генерации. Заметим, что при $\delta=0$ соотношение для границ областей $P=\pm1$ в случае $T_\alpha=T_\beta$ переходит в соотношение Ван-дер-Поля и Стретта [6], полученное для консервативной системы с симметричной модуляцией:

$$\cos\theta_\alpha\cos\theta_\beta-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_\alpha}{\theta_\beta}+\frac{\theta_\beta}{\theta_\alpha}\right)\sin\theta_\alpha\sin\theta_\beta=\pm1. \quad (7)$$

При любой заданной скважности, т. е. при любом отношении $S=T_\beta/T_\alpha$, области возбуждения лежат в сечении фигуры, построенной в соответствии с соотношением (5), с поверхностью $S=\text{const}$. Пересечение этой поверхности с любой плоскостью $m=\text{const}$ представляет собой прямую (см. рис. 2): $\theta_\beta=S(1+m)^{1/2}(1-m)^{1/2}\theta_\alpha$. При увеличении

m эта прямая осуществляет поворот к оси θ_β. При $m=0$ $\theta_\beta=S\theta_\alpha$. На рис. 3 в координатах $\lambda=(\theta_\alpha+\theta_\beta)/\pi$, m показаны области возбуждения контура с $\delta=3\cdot10^4$ с$^{-1}$ для $S=1$; 0,25 (*а*, *б*) и контура без затухания для $S=0{,}25$ (*в*). Введение переменной λ удобно потому, что ее можно рассматривать как отношение эквивалентной частоты $\omega_{экв}=(\theta_\alpha+\theta_\beta)/T_М$, на которой за период модуляции создается набег фазы, равный сумме фазовых набегов на интервалах T_α и T_β, к субгармонике частоты модуляции $p_М=2\pi/T_М$, т. е. $\lambda=2\omega_{экв}/p_М$.

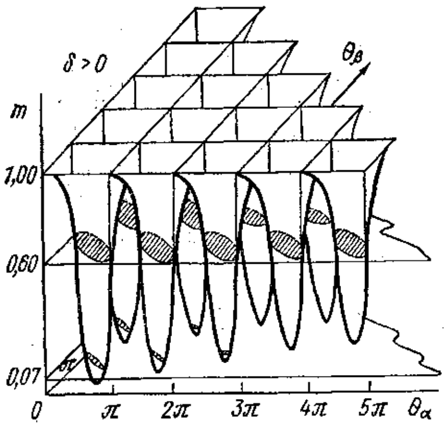

Рис. 1

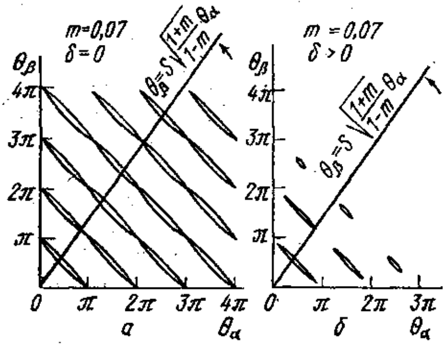

Рис. 2

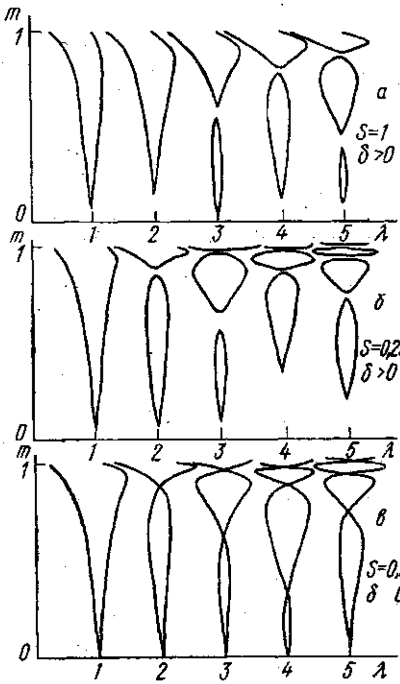

Рис. 3

Из рис. 3 видно, что зоны возбуждения могут расщепляться на дискретные области, число которых не превышает номера зоны n и зависит от S. То есть расщепляются только зоны с номером $n>S+1$, при этом в случае $n<S^{-1}+1$ число областей в расщепленной зоне будет максимальным и равным n, если это допускает малость затухания контура (см. рис. 3, *а*, *б*). При отсутствии затухания области, составляющие каждую n-ю зону, соприкасаются в точках с координатами (см. рис. 3, *в*)

$$\lambda=n,\ m=[(n-i)^2-S^2i^2][(n-i)^2+S^2i^2]^{-1},$$

где $i=1, 2, \ldots, [n/(1+S)]$.

Теоретические результаты, представленные на рис. 1, 2, *а*, 3 были получены с помощью ЭВМ БЭСМ-6. Границы областей, полученные экспериментально для значений $m=0\div0{,}5$, в масштабе приведенных рисунков практически совпадают с теоретическими границами, что указывает на хорошее соответствие выбранной математической модели и реальной системы. В экспериментальном контуре в качестве управляемой емкости использовались как варикапы КВС-111А, так и МДП-варикапы. Полученные результаты представляют практический интерес для разработки новых методов приема и формирования радиосигналов.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность К. К. Лихареву за обсуждение работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мигулин В. В. и др. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. [2] Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. [3] Мак-Лахан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М.: ИЛ, 1953. [4] Андронов А. А. Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1968, с. 21. [5] Стретт М. Д. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков—Киев, 1935. [6] Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959.

Поступила в редакцию
09.06.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 551.482.212:551.465

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОФИЛЯ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ ПРИДОННОГО ПЛОТНОСТНОГО ТЕЧЕНИЯ

А. Ю. Пыркин

(кафедра физики моря и вод суши)

Целью данной работы является построение профиля средней скорости придонного плотностного потока [1, 2]. Рассматривается двумерное стационарное придонное плотностное течение, распространяющееся вдоль наклонного дна. Расположение осей координат показано на рис. 1. Согласно экспериментальным данным, длина области распространения придонного плотностного потока значительно превосходит его толщину [3]. Следовательно, в данном случае можно считать справедливыми допущения теории пограничного слоя [4]. Тогда, используя гипотезу Буссинеска [4], можно записать следующие уравнения для расчета вертикального распределения средней скорости в исследуемом течении:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{gi\Delta\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\mu\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0, \tag{2}$$

где u и w — продольная и вертикальная составляющие средней скорости течения, g — ускорение силы тяжести, i — уклон дна, ρ — плотность воды, $\Delta\rho$ — разность плотностей воды в придонном плотностном потоке и в вышележащих слоях, μ — коэффициент турбулентной вязкости.

Граничные условия для системы (1)—(2) имеют вид

$$u(0,\ x)=0,\ w(0,\ x)=0, \tag{3}$$

$$u(z_у,\ x)=0,\ w(z_у,\ x)=0, \tag{4}$$

где $z_у$ — горизонт, соответствующий верхней границе слоя увлечения «чистой» воды. Справедливость условий (4) вытекает из имеющихся экспериментальных данных [1, 2].