При непрерывном алгоритме управления уравнение (7) записывается следующим образом:

$$\frac{d\theta^{(x)}}{dt} = -\frac{1}{\tau_{a\lambda}}\theta^{(x)} + \frac{1}{\tau_a}\theta_\alpha(t); \quad \tau_{a\lambda} = [2\gamma(L^2+\lambda)]^{-1},$$

решение которого имеет вид

$$\theta^{(x)} = \theta^{(x)}_{\text{нач}} e^{-t/\tau_{a\lambda}} + \frac{1}{\tau_a}\int_0^t e^{-\eta/\tau_{a\lambda}}\theta_\alpha\left(\frac{t-\eta}{\tau_\alpha}\right)d\eta. \qquad (9)$$

Подставляя (4), (5) в (9), получим выражения, аналогичные выражениям (6), (7).

Автор благодарен проф. А. П. Сухорукову за обсуждение работы и сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Харди Дж. У. ТИИЭР, 1978, **66**, № 6, с. 31. [2] Ахманов С. А. и др. Изв. вузов. Радиофизика, 1980, **23**, № 1, с. 3. [3] Воронцов М. А., Чесноков С. С. Изв. вузов. Физика, 1980, **23**, № 10, с. 15. [4] Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Изв. АН СССР, сер. физ., 1982, **46**, № 10, с. 1933. [5] Сухоруков А. П., Шумилов Э. Н. Квант. электроника, 1979, **46**, № 5, с. 986.

Поступила в редакцию
14.07.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 538.56;533.90

ПРЕДЕЛЬНЫЙ КПД ПЛАЗМЕННОГО УСИЛИТЕЛЯ

В. К. Гришин, М. Ф. Каневский

(кафедра ядерных взаимодействий и ускорителей)

Цель настоящей работы — проанализировать эффективность взаимодействия заряженного пучка с возбуждаемой электромагнитной волной. Предлагаемая методика может быть использована для оценок в различных электродинамических структурах, однако анализ здесь ограничивается плазменными системами с черенковским усилением.

Рассмотрим полубесконечный металлический волновод радиуса R с осью $z \geqslant 0$, полностью заполненный однородной плазмой. В волновод непрерывно инжектируется моноэнергетический заряженный пучок с током I_b и скоростью $v_0 = \beta_0 c$. Пучок и плазма замагничены. На вход системы подается начальный сигнал в виде одной из собственных монохроматических волн волновода E-типа, фазовая скорость которой $v_\phi \leqslant v_0$. Благодаря этому волна, распространяясь вместе с пучком, интенсивно усиливается им, и амплитуда поля редко нарастает вдоль z. Но при определенном уровне поля частицы пучка захватываются волной, так что усиление поля прекращается. Это состояние нелинейного насыщения, наступающее на характерной длине L пространственного усиления, и определяет наибольшую передачу энергии пучка в поле.

Анализ этой традиционной и имеющей прямой практический смысл схемы пучково-плазменного усилителя предпринимался неоднократно. Однако аналитическое рассмотрение ограничивалось, как правило, начальной стадией. Последующие этапы в силу нелинейности процессов могут успешно исследоваться лишь с помощью численного подхода (см., например, [1]). Тем не менее и в последнем случае можно получить ряд лимитирующих аналитических оценок, обращаясь непосредственно к рассмотрению конечного этапа взаимодействия волна—частицы.

Итак, перейдем к описанию системы в состоянии насыщения при $z \sim L$, когда частицы пучка, будучи захвачены волной, имеют ту же самую скорость и более не усиливают поле. Состояние равновесия пучок—поле можно описать, используя закон сохранения энергии-импульса. Потоки энергии и импульса в начальной точке $z=0$ практически целиком определяются входящим пучком, поэтому баланс потоков линейных плотностей энергии пучка Π_b и поля Π_E и линейных плотностей импульса пучка и поля $G_{b,E}$ записывается в виде (диссипацией пренебрегаем)

$$\begin{gathered} \Pi_E+\Pi_b=\Pi_{b0}=mc^2 I_b \gamma_0/e, \\ G_E+G_b=G_{b0}=mcI_b\gamma_0\beta_0/e. \end{gathered} \tag{1}$$

Значения Π, G_b целесообразно выразить через линейную плотность энергии пучка W_b' в собственной системе координат волна—пучок при $z=L$. Если в этот момент волна и пучок обладают скоростью $v=\beta c$, то $\Pi_b=\gamma^2\beta c W_b'$ и $G_b=\gamma^2\beta^2 W_b'$ [2]. В свою очередь, величина W_b' — довольно сложная функция состояния пучка, поскольку частицы имеют различные скорости и положения вдоль волны, так что «захват» и «равновесие» следует понимать как среднее по пучку (напомним, что сказанное относится к точке $z=L$; при $z>L$ может отмечаться дополнительное скольжение пучка вдоль волны, и тогда связь Π, G_b и W_b' сложнее). Тем не менее здесь предполагается, что энергетический разброс при $z=L$ невелик; расслоение пучка, т. е. проскакивание частиц вдоль волны, несущественно. Величина W_b' должна определяться с помощью дополнительного анализа, который в конечном счете и устанавливает связь параметров нелинейного состояния системы с I_b, γ_0 и т. д.

Обратим внимание, однако, на то, что система (1) позволяет получить интересующие нас оценки без детализации вида W_b'. Действительно, исключая W_b', получаем соотношение для КПД усиления:

$$\eta=\frac{\Pi_E}{\Pi_{b0}}=\frac{\beta_0-\beta}{cG_E/\Pi_E-\beta}. \tag{2}$$

Величины G, Π_E и их отношение нетрудно получить с помощью выражений для вектора Пойнтинга и компоненты T_{zz} тензора энергии-импульса, описывающего плотность потока импульса вдоль z [2, 3]. Для E-волны, когда $E_z=E_0J_0(\mu_1 r/R)\sin(\omega t-kz)$ при $J_0(\mu_1)=0$ и $\omega/(kc)=\beta$, в результате получаем

$$\eta=\frac{2\beta\gamma^4(\beta_0-\beta)\mu_1^2}{\mu_1^2\gamma^2-\varepsilon_p k^2R^2}, \tag{3}$$

где ε_p — продольная составляющая диэлектрического тензора плазмы. Следуя (3), можно указать предельное значение КПД усиления различных режимов работы. Если реализуется режим резонансного усиления, когда начальные скорости волны и пучка совпадают, т. е. $\omega/k_0=v_0$, то η принимает вид

$$\eta=\frac{2\beta^3\gamma^4(\beta_0-\beta)}{\gamma_0^2\beta_0^2+\gamma^2\beta^2}. \tag{4}$$

Наибольшее значение КПД достигает величины $\eta_{max}=0{,}168$ (при $\beta\simeq$

$\simeq \beta_0^2$ в релятивистском случае с $\gamma_0^2 > 3$), что точно совпадает с результатом численного анализа на базе укороченных уравнений [1]. Интересно, что величина η_{max} не зависит от параметров системы, хотя, конечно, эта зависимость обнаруживается при построении кривых $\eta = \eta(I_b, \gamma_0)$.

Значение КПД можно повысить, если следовать известной практике введения начальной расстройки $\Delta = \omega/k_0 - v_0 \neq 0$, когда $\varepsilon_p = 1 - [\mu_1^2\gamma_0^2/(k_0^2R^2) + 1]/(v_0 + \Delta)^2$. При отрицательных расстройках величина $\eta_{max} > 0{,}3$.

Соотношение (3) позволяет получить, помимо зависимости КПД от начальных условий, предельные оценки в случаях, когда используется нелинейная подстройка системы. Поскольку в процессе нарастания поля энергия и скорость пучка убывают, то для отдаления момента захвата частиц и увеличения КПД можно либо ускорять пучок, либо путем перестройки системы замедлять скорость волны вдоль z [4]. Оценим перспективность последнего способа. В плазменном волноводе снижение $v_ф$ можно обеспечить, регулируя плотность плазмы вдоль z. Но при этом должно оставаться $|\varepsilon_p|k^2R^2 > \mu_1^2\gamma^2$ [5]. Отсюда сразу же следует, что $\eta_{max} \to \gamma^2\beta(\beta_0 - \beta)|_{max} = 0{,}5$ (для любых γ_0). Эта оценка обобщает результаты расчетов ряда частных случаев [6, 7].

Дальнейший анализ требует конкретизации состояния пучка. Эта весьма непростая задача заслуживает отдельного рассмотрения. Для широких пучков здесь можно воспользоваться способом, указанным в работе авторов [5]. Укажем также, что изложенный подход можно использовать и в других, не только усилительных, но и генераторных схемах.

Авторы благодарны А. А. Коломенскому и А. А. Рухадзе за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кузилев М. В., Рухадзе А. А., Филиппычев Д. С. Препринт № 21 ФИАН СССР. М., 1981. [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: ГИФМЛ, 1960, § 32. [3] Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1965, § 3.2. [4] Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 1970. [5] Гришин В. К., Каневский М. Ф. ЖТФ, 1980, **50**, с. 1616. [6] Лошков И. В. Физика плазмы, 1977, **3**, с. 577. [7] Гришин В. К., Коломенский А. А. Кр. сообщения по физике ФИАН СССР, 1979, № 11, с. 24.

Поступила в редакцию
23.07.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 530.145.7

ЧАСТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ В СЛУЧАЕ $SU(2)$-СИММЕТРИИ

А. П. Демичев
(НИИЯФ)

В ряде задач квантовой теории поля и статистики весьма полезными оказываются преобразования Лежандра производящих функционалов функций Грина (см. работу [1] и библиографию в ней). Они используются при доказательстве перенормируемости неабелевых калибровочных теорий поля (см., например, [2]), вычислении аномальных