$\simeq \beta_0^2$ в релятивистском случае с $\gamma_0^2 > 3$), что точно совпадает с результатом численного анализа на базе укороченных уравнений [1]. Интересно, что величина η_{max} не зависит от параметров системы, хотя, конечно, эта зависимость обнаруживается при построении кривых $\eta = \eta(I_b, \gamma_0)$.

Значение КПД можно повысить, если следовать известной практике введения начальной расстройки $\Delta = \omega/k_0 - v_0 \neq 0$, когда $\varepsilon_p = 1 - [\mu_1^2\gamma_0^2/(k_0^2R^2) + 1]/(v_0 + \Delta)^2$. При отрицательных расстройках величина $\eta_{max} > 0{,}3$.

Соотношение (3) позволяет получить, помимо зависимости КПД от начальных условий, предельные оценки в случаях, когда используется нелинейная подстройка системы. Поскольку в процессе нарастания поля энергия и скорость пучка убывают, то для отдаления момента захвата частиц и увеличения КПД можно либо ускорять пучок, либо путем перестройки системы замедлять скорость волны вдоль z [4]. Оценим перспективность последнего способа. В плазменном волноводе снижение $v_ф$ можно обеспечить, регулируя плотность плазмы вдоль z. Но при этом должно оставаться $|\varepsilon_p| k^2R^2 > \mu_1^2\gamma^2$ [5]. Отсюда сразу же следует, что $\eta_{max} \to \gamma^2\beta(\beta_0 - \beta)|_{max} = 0{,}5$ (для любых γ_0). Эта оценка обобщает результаты расчетов ряда частных случаев [6, 7].

Дальнейший анализ требует конкретизации состояния пучка. Эта весьма непростая задача заслуживает отдельного рассмотрения. Для широких пучков здесь можно воспользоваться способом, указанным в работе авторов [5]. Укажем также, что изложенный подход можно использовать и в других, не только усилительных, но и генераторных схемах.

Авторы благодарны А. А. Коломенскому и А. А. Рухадзе за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кузилев М. В., Рухадзе А. А., Филиппычев Д. С. Препринт № 21 ФИАН СССР. М., 1981. [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: ГИФМЛ, 1960, § 32. [3] Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1965, § 3.2. [4] Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 1970. [5] Гришин В. К., Каневский М. Ф. ЖТФ, 1980, **50**, с. 1616. [6] Лошков И. В. Физика плазмы, 1977, **3**, с. 577. [7] Гришин В. К., Коломенский А. А. Кр. сообщения по физике ФИАН СССР, 1979, № 11, с. 24.

Поступила в редакцию
23.07.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 1

УДК 530.145.7

ЧАСТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ В СЛУЧАЕ $SU(2)$-СИММЕТРИИ

А. П. Демичев
(НИИЯФ)

В ряде задач квантовой теории поля и статистики весьма полезными оказываются преобразования Лежандра производящих функционалов функций Грина (см. работу [1] и библиографию в ней). Они используются при доказательстве перенормируемости неабелевых калибровочных теорий поля (см., например, [2]), вычислении аномальных функций Грина [1, 2], выводе уравнений для связанных состояний многих тел [3]. В работе [4] второе преобразование Лежандра было использовано для анализа свойств связанных состояний в квантовополевой модели конфайнмента кварков.

При исследовании свойств высших преобразований обычно рассматривается теория одного скалярного поля. При этом оказывается, что диаграммы разложения N-го преобразования Лежандра обладают важным свойством N-частичной неприводимости [1]. Как известно, современные реалистичные теории характеризуются высокой симметрией. Для них возможен новый вид преобразования Лежандра — по части N-локальных токов, реализующих некоторое неприводимое представление группы симметрии (преобразование по всем N-локальным токам практически не отличается от случая однокомпонентного поля).

В данной работе, следуя в основном методу [1], исследуются свойства диаграммного разложения таких преобразований на примере второго преобразования Лежандра по синглетному току в случае $SU(2)$-симметричного лагранжиана.

Глобально инвариантное относительно группы $SU(2)$ действие запишем в виде

$$iS = A_a(x)\varphi^a(x) + A_{ab}(x, y)\varphi^a(x)\varphi^b(y) + A_{abc}(x, y, z)\varphi^a(x)\varphi^b(y)\varphi^c(z) \equiv$$
$$\equiv A_a(x)\varphi^a(x) + A^{\mu}(x, y)\varphi^a(x)\sigma^{\mu}_{ab}\varphi^b(y) + A_{abc}(x, y, z)\varphi^a(x)\varphi^b(y)\varphi^c(z).$$

Здесь φ^a — поле, реализующее фундаментальное представление $SU(2)$; A_a, A_{ab}, A_{abc} — произвольные мультиспинорные токи, $A^{\mu} = A_{ab}\sigma_{\mu}{}^{ab}/2$; σ_{μ} — матрицы Паули, a, b, $c=1, 2$; $\mu=0, ..., 3$. По повторяющимся переменным и индексам подразумевается соответственно интегрирование и суммирование.

Преобразование Лежандра производящего функционала W связных функций Грина по синглетному току определяется так:

$$\Gamma(\alpha^a, \alpha^0, A_i, A_{abc}) = W - A_a(x)\alpha^a(x) - A_0(x, y)\alpha^0(x, y),$$

где A_a и A_0 находятся из равенств

$$\frac{\delta W}{\delta A_a(x)} = \alpha^a(x), \quad \frac{\delta W}{\delta A_0(x, y)} = \alpha^0(x, y).$$

Чтобы диаграммы разложения Γ были связными, необходимо перейти к связным переменным $\beta^{ab}(x, y) = \alpha^{ab}(x, y) - \alpha^a(x)\alpha^b(y)$, $\beta^a(x) = \alpha^a(x)$.

Итерация осуществляется с помощью уравнений связи [1]. Уравнения связи первой группы (которые мы и будем здесь только рассматривать) в нашем случае можно записать в виде

$$\beta^{bc}P_{ca} = \delta^b{}_a, \tag{1}$$

где

$$P_{ca} = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\beta^c\delta\beta^a} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\beta^c\delta\beta_0}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\beta_0\delta\beta_0}\right)^{-1}\frac{\delta\Gamma}{\delta\beta_0\delta\beta^a} + 2\sigma^0_{ac}\frac{\delta\Gamma}{\delta\beta_0}. \tag{2}$$

Используя уравнения (1), выразим β^k, $k=1, 2, 3$, через независимые переменные и запишем оставшееся уравнение в форме, удобной для итерации. Разлагая β и P по матрицам Паули, представим (1) в виде

$$\beta^{\mu}P^{\nu}(\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0} + \delta_{\mu k}\delta_{\nu k}) = 1, \tag{3}$$

$$\beta^{\mu}P^{\nu}(\delta_{\mu k}\delta_{\nu 0} + \delta_{\mu 0}\delta_{\nu k} + \delta_{\mu q}\delta_{\nu p}i\varepsilon_{qpk}) = 0. \tag{4}$$

Из (4) получаем

$$\beta_p = -\beta_0 P_k B_{kp}^{-1}, \tag{5}$$

где

$$B_{kp} = \delta_{kp} P_0 - i\varepsilon_{kqp} P_q \quad (k,\ q,\ p = 1,\ 2,\ 3). \tag{6}$$

Подставляя (5) в (3), приходим к уравнению

$$P_0 = \beta_0^{-1} + P_q B_{qk}^{-1} P_k. \tag{7}$$

Это уравнение решается итерациями по степеням β_0 с сингулярным членом $\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln\beta_0$ (он определяется первым членом правой части (7)). Чтобы увидеть это, рассмотрим сначала обращение матрицы (6). Ее элементами являются ядра операторов, поэтому стандартные методы обращения матриц здесь не подходят. Однако для итерационного решения достаточно представить B^{-1} в виде ряда по β_0.

Из вида сингулярного члена следует, что

$$\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\beta_0\,\delta\beta_0}\right)^{-1} \sim \beta_0^2 + (\text{ряд по } \beta_0^n,\quad n \geqslant 3).$$

Значит, минимальная степень двух первых членов (2) по β_0 равняется минимальной степени входящих в них Γ. Следовательно, B_{qp} можно представить в виде (заметим, что $\delta\Gamma/\delta\beta_0$ входит только в P_0)

$$B_{qp} = \beta_0{}^{-1}\delta_{qp} + C_{qp},$$

где $C_{qp} \equiv P_0{}'\delta_{qp} + i\varepsilon_{pqk} P_k$ — ряд по положительным степеням β_0; $P_0{}' = P_0 - \beta_0{}^{-1}$. Таким образом,

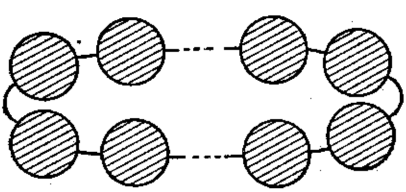
$$B^{-1} = \beta_0 (1 + C\beta_0)^{-1} = \beta_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (C\beta_0)^n.$$

Окончательно итерируемое уравнение для $\Gamma' \equiv \Gamma - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln\beta_0$ приобретает вид

$$\frac{\delta\Gamma'}{\delta\beta_0} = \frac{1}{4}\sigma_0^{ab}\frac{\delta\Gamma'}{\delta\beta^a\delta\beta^b} - \frac{1}{4}\sigma_0^{ab}\frac{\delta\Gamma'}{\delta\beta^a\delta\beta_0}\left(\frac{\delta\Gamma'}{\delta\beta_0\delta\beta_0}\right)^{-1}\frac{\delta\Gamma'}{\delta\beta_0\,\delta\beta^b} +$$

$$+ P_q\beta_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (C\beta_0)^n_{qp} P_p. \tag{8}$$

Первые два члена правой части (8) порождают двухчастично неприводимые диаграммы, полностью аналогичные случаю однокомпонентного поля [1]. Структура диаграмм, порождаемых последним членом, показана на рисунке. Линия соответствует β_0, кружок — двухчастично неприводимому блоку $P_0{}'$ или P_k. Очевидно, эти диаграммы двухчастично приводимы.



Таким образом, диаграммы преобразования Лежандра по части билокальных токов не обладают, вообще говоря, свойством двухчастичной неприводимости.

Заметим, что мы рассмотрели лишь часть диаграмм Γ — во всех порядках по β_0 и нулевом по $(A^{-1})_k$. Для получения остальных графов надо использовать уравнение связи второй группы [1] для A_{abc} (ток A_k не является графическим элементом). Это нетрудно сделать, используя методы [1] и данной заметки.

Автор выражает благодарность Н. Ф. Нелипе и Ю. М. Письмаку за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. [2] Тейлор Дж. Калибровочные методы в квантовой теории поля. М.: Мир, 1978. [3] Рочев В. Е. ТМФ, 1982, **51**, № 1, с. 22. [4] Chaichian M., Demichev A. P., Nelipa N. F. Phys. Lett., 1981, **102B**, N 1, p. 43.

Поступила в редакцию
27.07.82

Поправка

В статье В. И. Шестакова (Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1983, **24**, № 4, с. 40) допущены опечатки:

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
41	6 сверху	$A\supset\subset B \rightleftharpoons (A\supset B)\bigcup(B\supset A)$	$A\supset\subset B \rightleftharpoons (A\supset B)\bigcap(B\supset A)$
44	19 сверху	$[\mathbf{V}]=[\mathbf{V}_e]$ (4)	$[\mathbf{V}]=[V_e]$ (4)
44	16 снизу	$(\mathbf{a}_0)$	(a_0)