

УДК 537.871.6

ОСОБЕННОСТИ ЛУЧЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ПЛОСКОСЛОИСТЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В. Д. Гусев, Н. А. Махмутов

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Распространение электромагнитных волн в плоскослоистых изотропных средах ($\mu=1$, $\epsilon=\epsilon(z)$) описывается уравнением Гельмгольца, которое для горизонтально поляризованных волн ($\mathbf{E}=\{0, E, 0\}$) имеет вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - k^2 \epsilon(z) E = 0. \quad (1)$$

Как показано в работах [1, 2], в случае, когда на плоскослоистую изотропную среду ($z \geq 0$) из однородного полупространства ($z \leq 0$) под углом θ_0 к оси Oz падают плоские монохроматические волны, точное решение (1) может быть представлено в виде суммы бегущих падающих и отраженных волн:

$$E(x, z) = E_{\text{пад}} \sqrt{Q(s, z)} e^{iks_x + ik \int_0^z \frac{dz}{Q(s, z)}} + E_{\text{отр}} \sqrt{Q(s, z)} e^{iks_x - ik \int_0^z \frac{dz}{Q(s, z)}}, \quad (2)$$

где $E_{\text{пад}}$ и $E_{\text{отр}}$ — постоянные, определяемые из граничных условий, k — волновое число для свободного пространства, $s = \sin \theta_0$. При этом действительная положительная функция $Q(s, z)$ определяется из нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$2Q \frac{d^2 Q}{dz^2} - \left(\frac{dQ}{dz} \right)^2 + 4k^2 [\epsilon(z) - s^2] Q^2 = 4k^2, \quad (3)$$

а функция

$$m(s, z) = \sqrt{\frac{1}{Q^2(s, z)} + s^2} \quad (4)$$

представляет собой эффективный показатель преломления плоскослоистой среды.

В настоящей работе на основе точного решения уравнения Гельмгольца (1) в виде суммы бегущих волн (2), «управляемых» эффективным показателем преломления (4), исследуются некоторые особенности лучевых траекторий в плоскослоистых средах с полным отражением. При этом рассматриваются линейный слой бесконечной толщины (рис. 1, а):

$$\epsilon(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \leq 0, \\ 1 - \frac{z}{z_0} & \text{при } z \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

и обратноквадратичный слой (рис. 1, б):

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \leq 0, \\ 1 + \left(\frac{h}{z_0}\right)^2 - \left(\frac{h}{z_0 - z}\right)^2 & \text{при } 0 \leq z \leq z_0, \end{cases} \quad (6)$$

толщина которого конечна. Зависимости (5) и (6) характеризуют высотные профили диэлектрической проницаемости ионосферы на частотах, меньших максимально применимой, и, таким образом, рассматриваемая задача описывает распространение дециметровых радиоволн в ионосфере.

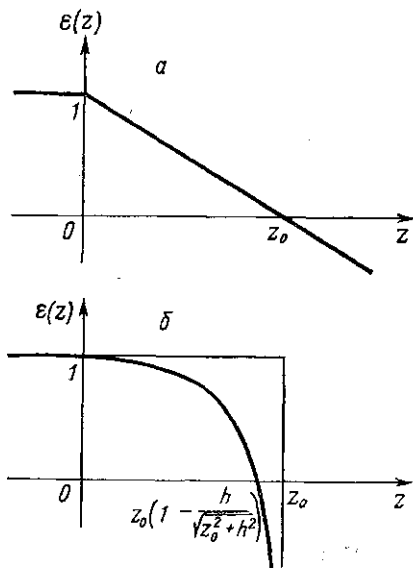


Рис. 1

В настоящей работе рассматриваются только изотропные в обычном смысле среды, для которых траектория усредненного по времени вектора Пойнтинга совпадает с траекторией волновой нормали и, вообще говоря, не совпадает с траекторией вектора групповой скорости волнового пакета [3—5]. Поэтому, следуя [3, 4], траекторию волновой нормали будем называть лучевой (разделы 1 и 2), а траекторию вектора групповой скорости волнового пакета будем для простоты называть траекторией волнового пакета (раздел 3).

1. Эффективные траектории лучей. Из точного решения (2) видно, что уравнения волновых фронтов имеют вид

$$\Phi^{\text{пад,отр}}(x, z) = ksx \pm k \int_0^z \frac{dz}{Q(s, z)} = \text{const}, \quad (7)$$

где знаки плюс и минус соответствуют падающим и отраженным волнам. Отсюда следует, что проекции волновой нормали $l = k/k$, где $k = \nabla\Phi$, определяются выражениями

$$l_x(z) = \frac{sQ(s, z)}{\sqrt{s^2Q^2(s, z) + 1}}, \quad l_y = 0, \quad l_z(z) = \frac{\pm 1}{\sqrt{s^2Q^2(s, z) + 1}}, \quad (8)$$

а уравнение эффективной траектории луча имеет вид

$$\frac{dx}{dz} = \frac{l_x(z)}{l_z(z)} = \pm sQ(s, z). \quad (9)$$

Точка ее поворота $z_{\text{пов}}^{\text{эфф}}$ определяется, как обычно, из уравнения

$$l_z(z) = 0. \quad (10)$$

Из (8) и (10) следует, что при $z \rightarrow z_{\text{пов}}^{\text{эфф}}$ $Q(s, z) \rightarrow \infty$.

Для линейного слоя (5) решение уравнения (3) имеет вид

$$Q(s, z) = \pi \left(\frac{kz_0}{3}\right)^{1/3} \left[\frac{t(s, z)}{2}\right]^{2/3} H_{1/3}^{(1)}[t(s, z)] H_{1/3}^{(2)}[t(s, z)], \quad (11)$$

где $t(s, z) = \frac{2}{3} k z_0 \left(c^2 - \frac{z}{z_0} \right)^{3/2}$, и не зависит от выбора ветви радикала

$\sqrt{c^2 - z/z_0}$ при переходе через точку ветвления $z = z_0 c^2$, $c = \cos \theta_0$.

При $z < z_0 c^2$ и $t(s, z) \gg 1$ можно воспользоваться асимптотическими значениями цилиндрических функций, тогда (11) принимает вид

$$Q(s, z) \cong Q_A(s, z) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - z/z_0}}, \quad (12)$$

а эффективный показатель преломления совпадает с локальным значением

$$m(s, z) \cong \sqrt{1 - z/z_0}. \quad (13)$$

При этом точное решение (2) уравнения Гельмгольца переходит в известное геометрикооптическое (см., например, [4, 5]).

При $z > z_0 c^2$ аргумент цилиндрических функций комплексный. При условии $|t(s, z)| \gg 1$ можно воспользоваться асимптотическими значениями цилиндрических функций от комплексных аргументов, и тогда

$$Q(s, z) \cong Q_B(s, z) = \frac{e^{\frac{4}{3} k z_0 \left(\frac{z}{z_0} - c^2 \right)^{3/2}}}{\sqrt{\frac{z}{z_0} - c^2}}. \quad (14)$$

Графики функций $Q(s, z)$, $Q_A(s, z)$ и $Q_B(s, z)$ изображены на рис. 2 при $\frac{2}{3} k z_0 c^3 = 10$ соответственно сплошной, пунктирной и штрих-пунктирной линиями. Как видно из этих графиков, отличие $Q_A(s, z)$ и $Q_B(s, z)$ от $Q(s, z)$ становится существенным только вблизи точки ветвления $z = z_0 c^2$ и при условии

$$Q(s, z_0 c^2) \cong 1,6 (k z_0)^{1/3} \gg 1, \quad (15)$$

т. е. для достаточно толстого слоя, оно пренебрежимо мало. Отметим, что для ионосферных слоев условие (15), как правило, выполняется, и поэтому для функции $Q(s, z)$ применимы асимптотические значения (12) и (14). Из выражения (14) и рис. 2 видно, что для линейного слоя точка поворота эффективной траектории луча находится на бесконечности ($Q(s, z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$).

Для обратноквадратичного слоя (6) решение уравнения (3) имеет вид

$$Q(s, z) = \frac{\pi t(s, z)}{2 \sqrt{c^2 + (h/z_0)^2}} H_v^{(1)} [t(s, z)] H_v^{(2)} [t(s, z)], \quad (16)$$

(де $t(s, z) = k \sqrt{c^2 + (h/z_0)^2} (z_0 - z)$, $v = \sqrt{(kh)^2 + 1/4}$). Асимптотические разложения цилиндрических функций в (16) существенно зависят от соотношения между аргументом и индексом и будут различными для различных областей плоскостной среды, поэтому останавливаться на них не будем. График зависимости (16) имеет такой же вид, как для линейного слоя (рис. 2, сплошная линия), за исключением того, что точка поворота эффективной траектории луча конечна и совпадает с границей слоя ($Q(s, z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$).

2. Траектории лучей в приближении геометрической оптики. В условиях применимости приближения геометрической оптики (ГО) в уравнении (3) можно пренебречь членами, содержащими производные функции $Q(s, z)$. Тогда

$$Q(s, z) \cong \frac{1}{V_{\varepsilon(z) - s^2}}, \quad m(s, z) \cong V_{\varepsilon(z)}, \quad (17)$$

уравнение траектории луча (9) принимает известный [4] вид

$$\frac{dx}{dz} = \pm \frac{s}{V_{\varepsilon(z) - s^2}}, \quad (18)$$

а точка ее поворота $z^{\text{пов}}$ определяется из уравнения

$$\varepsilon(z) - s^2 = 0. \quad (19)$$

Для линейного слоя выражения (17) совпадают с асимптотическими значениями (12), (13). Интегрирование (18) приводит к уравнению

$$x^{\text{пов}}(z) = 2z_0 s \left(c \mp \sqrt{c^2 - \frac{z}{z_0}} \right), \quad (20)$$

при этом координаты точки поворота траектории равны

$$x_{\text{пов}}^{\text{пов}} = 2z_0 s c, \quad z_{\text{пов}}^{\text{пов}} = z_0 c^2, \quad (21)$$

а смещение траектории луча

$$\Delta x^{\text{пов}} = 2x_{\text{пов}}^{\text{пов}} = 4z_0 s c. \quad (22)$$

Для обратноквадратичного слоя (6) интегрирование (18) приводит к уравнению

$$x^{\text{пов}}(z) = \frac{z_0 s}{c^2 + \left(\frac{h}{z_0}\right)^2} \left[c \mp \frac{z_0 - z}{z_0} \sqrt{c^2 + \left(\frac{h}{z_0}\right)^2 - \left(\frac{h}{z_0 - z}\right)^2} \right]. \quad (23)$$

При этом координаты точки поворота траектории равны

$$x_{\text{пов}}^{\text{пов}} = \frac{z_0 s c}{c^2 + (h/z_0)^2}, \quad z_{\text{пов}}^{\text{пов}} = z_0 - \frac{h}{V_{c^2 + (h/z_0)^2}}, \quad (24)$$

а смещение траектории луча

$$\Delta x^{\text{пов}} = 2x_{\text{пов}}^{\text{пов}} = \frac{2z_0 s c}{c^2 + (h/z_0)^2}. \quad (25)$$

Отметим, что траектории лучей в приближении геометрической оптики обычно используются в качестве решений нулевого приближения в задачах рассеяния радиосигналов в ионосфере, а точка их поворота $z_{\text{пов}}^{\text{пов}}$ отождествляется с высотой отражения. При этом флуктуационные составляющие радиосигналов рассчитываются как интегралы вдоль этих траекторий. Однако вопрос о соответствии траекторий реальных радиосигналов и траекторий лучей в приближении геометрической оптики в теоретическом плане в литературе не рассматривался.

3. Эффективные траектории волновых пакетов. Реальный радиосигнал, как правило, представляет собой волновой пакет, и направление его распространения определяется вектором групповой скорости $\mathbf{u}^{\text{гр}} = = d\omega/d\mathbf{k}$. Траектория волнового пакета, как указано в [5], для неоднородной среды, вообще говоря, не совпадает с траекторией луча. В частности, для плоскослойной среды она отличается от траектории луча в приближении геометрической оптики в области, где это приближение неприменимо, т. е. в окрестности точки поворота. Рассмотрим этот вопрос подробнее на основе формул для проекций групповой скорости, полученных в [5].

Для рассматриваемой задачи эти формулы принимают вид:

$$u_x^{\Gamma P}(z) = \left[l_x(z) - \frac{1-l_x^2(z)}{m(s,z)} \frac{\partial m(s,z)}{\partial l_x(z)} \right] \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \omega m(s,z)}{\partial \omega} \right]^{-1},$$

$$u_y^{\Gamma P} = 0,$$

$$u_z^{\Gamma P}(z) = \left[l_z(z) + \frac{l_x(z)l_z(z)}{m(s,z)} \frac{\partial m(s,z)}{\partial l_x(z)} \right] \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \omega m(s,z)}{\partial \omega} \right]^{-1},$$
(26)

где $m(s, z)$ представляет собой эффективный показатель преломления плоскослоистой среды (см. (4)), а $l_x(z)$ и $l_z(z)$ — проекции волновой

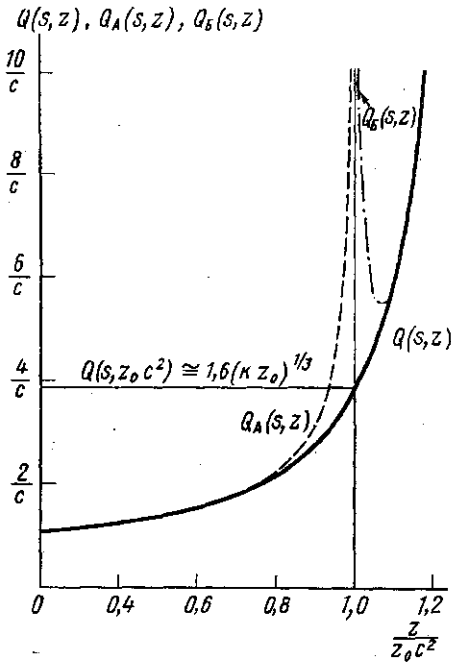


Рис. 2

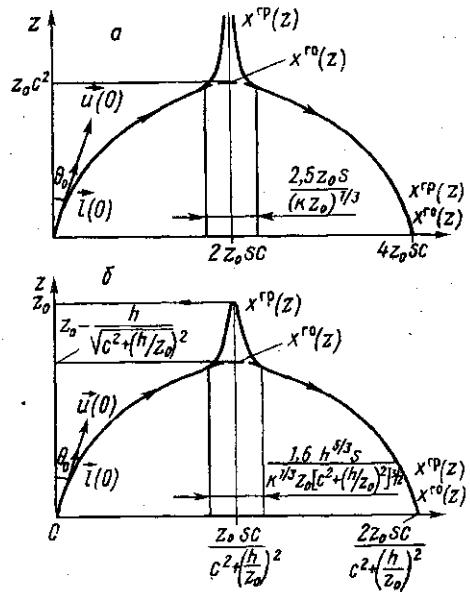


Рис. 3

нормали (см. (8)). Отсюда для эффективной траектории волнового пакета имеем уравнение

$$\frac{dx^{\Gamma P}}{dz} = \frac{u_x^{\Gamma P}(z)}{u_z^{\Gamma P}(z)},$$
(27)

которое после несложных преобразований с учетом (26) приводится к виду

$$\frac{dx^{\Gamma P}}{dz} = \frac{l_x(z)}{l_z(z)} - \frac{1}{l_z(z)} \frac{\partial m(s, z)}{\partial s}.$$
(28)

Второй член в (28), обусловленный зависимостью эффективного показателя преломления от угла падения электромагнитных волн, характеризует эффективную анизотропию плоскослоистой среды. В условиях применимости приближения геометрической оптики показатель преломления не зависит от угла падения (см. (17)) и траектория волнового пакета (28) совпадает с траекторией луча (18).

Подставляя в (28) выражения (4) и (8), получим

$$\frac{dx^{\text{rp}}}{dz} = \pm \frac{1}{Q^2(s, z)} \frac{\partial Q(s, z)}{\partial s}. \quad (29)$$

Для линейного слоя интегрирование (29) с учетом (11) дает

$$x^{\text{rp}}(z) = 2z_0 s \left[\frac{1}{Q(s, 0)} \mp \frac{1}{Q(s, z)} \right], \quad (30)$$

а для обратноквадратичного — с учетом (16)

$$x^{\text{rp}}(z) = \frac{z_0 s}{c^2 + (h/z_0)^2} \left[\frac{1}{Q(s, 0)} \mp \frac{z_0 - z}{z_0 Q(s, z)} \right]. \quad (31)$$

Зависимости (30) и (31) изображены на рис. 3, а и б соответственно сплошными линиями. Там же пунктирными линиями изображены геометрикооптические траектории (20) и (23). Из этих рисунков видно, что при условии

$$cQ(s, z_{\text{пов}}^{\text{го}}) \cong 1,6 (hz_0)^{1/3} c \gg 1 \quad (32)$$

для линейного слоя и при условиях

$$\begin{aligned} kh &\gg 1, \\ \frac{1,3 k^{1/3} z_0^2 c \sqrt{c^2 + (h/z_0)^2}}{h^{5/3}} &\gg 1 \end{aligned} \quad (33)$$

для обратноквадратичного слоя смещения траекторий волновых пакетов при отражении совпадают с геометрикооптическими (см. (22), (25)). При этом высоты отражений волновых пакетов превышают геометрикооптические (см. (21), (24)) и совпадают с точками поворота эффективных траекторий лучей. Однако связанные с этим дополнительные групповые задержки волновых пакетов в области $z > z_{\text{пов}}^{\text{го}}$ для достаточно толстых слоев пренебрежимо малы по сравнению с геометрикооптическими. В частности, для линейного слоя, как нетрудно показать, соответствующее условие приводит к неравенству вида (15).

Таким образом, при условиях (32), (33) эффективные траектории волновых пакетов в рассмотренных слоях практически совпадают с траекториями лучей в приближении геометрической оптики и, следовательно, использование последних в качестве решений нулевого приближения в задачах рассеяния радиосигналов в ионосфере является вполне оправданным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Виноградова М. Б., Гусев В. Д. Радиотехн. и электроника, 1974, 19, № 3, с. 481. [2] Гусев В. Д. Докт. дис. М.: МГУ, 1976. [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973. [4] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979. [5] Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
12.07.83