

УДК 551.511+532.529.2

О СТРУКТУРЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА В МОДЕЛИ ТРЕХМЕРНОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

А. М. Гусев, С. Ю. Касьянов

(кафедра физики моря и вод суши)

Рассматривается трехмерная конвекция в жидкости, вращающейся в цилиндрическом сосуде относительно неподвижных источников и стоков тепла, распределенных по всему объему сосуда. На границе области задаются условия теплоизоляции, непротекания и нормальности к границе области ротора отклонения скорости от скорости вращения жидкости как твердого тела. Используются уравнения приближения Буссинеска [1], записанные в безразмерных переменных для отклонения \mathbf{V} скорости жидкости от ее скорости при твердотельном вращении и для отклонения T температуры от некоторой средней. Система координат цилиндрическая, ось Oz направлена вертикально вверх.

Безразмерные параметры задачи: H — отношение высоты сосуда к его радиусу, ω — угловая скорость твердотельного вращения, Rg — число Прандтля, Gg — число Грассхофа, определенное по мощности источников тепла, a — параметр, входящий в выражение, определяющее распределение плотности Q мощности внутренних источников тепла:

$$Q = \left((J_1(\alpha_1 r) + J_1(\alpha_2 r)) \sin \varphi \cdot \left(1 + \cos \frac{\pi}{H} z \right) / \left(2 + a \cos \frac{\pi}{H} z \right) \right) / (2 + a),$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода, α_1, α_2 — первые два корня уравнения $dJ_1/dt=0$, r, φ и z — безразмерные координаты.

Решение задачи производится методом Галеркина с выбором базисных функций по [2]. Исследуется система 36 нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, порождаемая первыми 36 базисными функциями. При этом используются значения $Rg=7, H=0,4$. Исследование полученной системы показало, что при $a \leq 1,1$ для всех значений Gg, ω различные начальные условия приводят к установлению стационарных состояний, соответствующих образам особой точки этой системы $\{V=0, T=0, Gg=0, \omega=0\}$ при непрерывном изменении параметров Gg, ω . При $1,2 \leq a \leq 1,3$ на плоскости параметров (Gg, ω) появляется область, ограниченная нейтральной кривой (рис. 1), внутри которой стационарные режимы, соответствующие таким особым точкам, неустойчивы и развиваются автоколебания с частотой, близкой к ω .

При $a \geq 1,4$ на верхней ветви нейтральной кривой появляется характерный излом, соответствующий двойной точке, в которой обращаются в нуль одновременно действительные части двух пар комплексно-сопряженных собственных значений матрицы системы, линеаризованной в окрестности особой точки.

Вблизи нейтральной кривой, под ее ветвью, идущей вправо от двойной точки, малые возмущения стационарных режимов, задаваемые в направлении наиболее неустойчивых возмущений, приводят к установлению автоколебаний с частотой около $0,64 \omega$ (рис. 2, а).

Вблизи нейтральной кривой над нижней ее ветвью и под верхней ветвью левее двойной точки устанавливаются автоколебания с частотой около ω (рис. 2, б). В глубине области неустойчивости (см. рис. 1) малые возмущения стационарных режимов приводят к развитию колебаний, частота которых, будучи первоначально близкой к $0,64 \omega$, со временем увеличивается, а амплитуда почти линейно растет (рис. 2, в). Когда амплитуда достигает некоторого критического

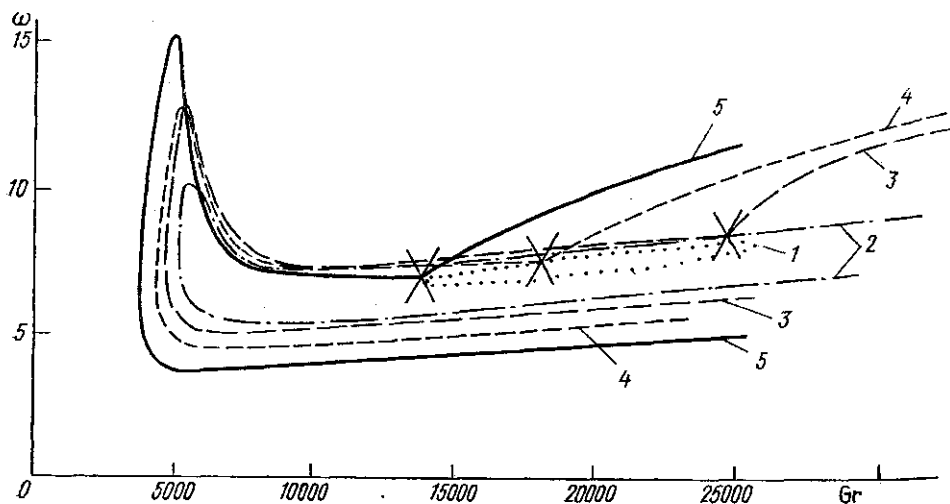


Рис. 1. Нейтральные кривые на плоскости (Gr, ω) : $a=1,2$ (1); $1,3$ (2); $1,4$ (3); $1,5$ (4) и $1,8$ (5)

значения, то постепенное возрастание частоты колебаний сменяется быстрым выходом системы на режим установившихся автоколебаний с частотой ω . Амплитуда их значительно больше амплитуды, характерной для режима установившихся автоколебаний с частотой $0,64 \omega$ (см. рис. 2, а).

Из состояния твердотельного вращения жидкости с постоянной температурой при $a \geq 1,4$ для всех значений Gr, ω , лежащих внутри области неустойчивости стационарных режимов, устанавливаются колебания с частотой ω и амплитудой, существенно большей амплитуды устанавливающихся автоколебаний с частотой $0,64 \omega$. В частности, это происходит, например, и для тех значений параметров, для которых малые возмущения стационарных режимов приводят к устойчивым автоколебаниям с частотой $0,64 \omega$ и даже для значений параметров вблизи нейтральной кривой над верхней ветвью, где асимптотически устойчивы стационарные режимы.

Расчеты, проведенные для $a=1,8, Gr=22\ 000, \omega=11,69$ при последовательно возрастающих величинах начальных возмущений соответствующего стационарного режима, задаваемых в направлении наиболее неустойчивых возмущений (рис. 3, а, б, в), показывают, что, во-первых, автоколебания с частотой $0,64 \omega$ имеют в фазовом пространстве предельный цикл, величина которого не зависит от величины малых возмущений стационарных режимов. При начальных возмущениях, лежащих внутри предельного цикла, фазовые траектории наматываются на него изнутри. При начальных возмущениях, лежащих вне предельного цикла, фазовые траектории наматываются на него снаружи. Во-вторых, область притяжения этого предельного цикла огра-

ничена и ее характерный радиус почти вдвое превышает характерный радиус самого предельного цикла.

При начальных условиях, лежащих вне области притяжения цикла, устанавливаются автоколебания с частотой ω со значительно большей амплитудой. Это объясняет установление из начального состояния $V=0$, $T=0$, которое является большим начальным возмущением по отношению к соответствующим особым точкам, автоколебаний с частотой ω в тех областях значений параметров, где устойчивы либо предельные циклы автоколебаний с частотой $0,64 \omega$, либо стационарные режимы. Характерной особенностью режима автоколеба-

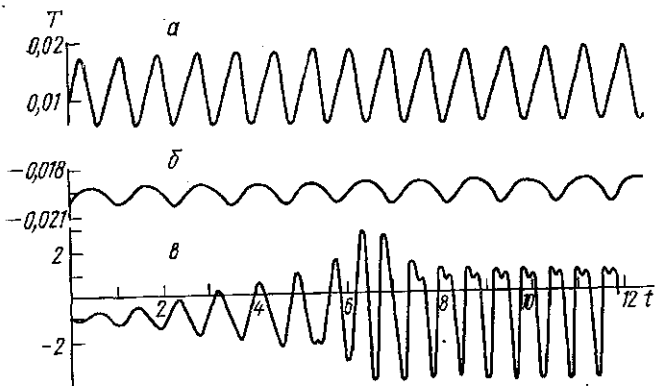


Рис. 2. Изменение температуры в точке с координатами $r=0,01$; $z=0$; $\varphi=0$ при $G\gamma=22000$, $a=1,8$: *a* — автоколебания с частотой $0,64 \omega$ вблизи верхней ветви нейтральной кривой ($\omega=11,69$); *б* — автоколебания с частотой ω вблизи нижней ветви нейтральной кривой ($\omega=4,87$); *в* — нарастание амплитуды, разрушение режима колебаний с частотой $0,64 \omega$ и установление автоколебаний с частотой ω в глубокой области неустойчивости ($\omega=11,06$)

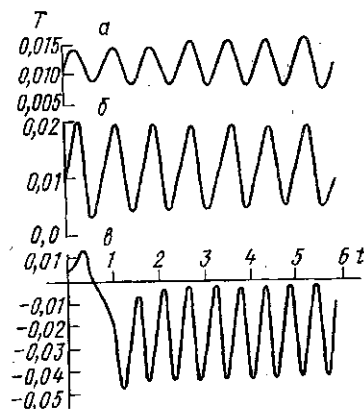


Рис. 3. Изменение температуры в точке $r=0,01$; $z=0$; $\varphi=0$ при $G\gamma=22000$, $\omega=11,69$: *a* — начальное возмущение особой точки лежит внутри предельного цикла; *б* — удвоенное начальное возмущение, оказывающееся лежащим вне предельного цикла, но внутри его области притяжения; *в* — утроенное по сравнению с (*a*) начальное возмущение, оказывающееся лежащим вне области притяжения предельного цикла

ний с частотой $0,64 \omega$ является то, что колебания происходят относительно особой точки, соответствующей данным значениям параметров, т. е. положение фазовой точки, осредненное за период колебаний, практически совпадает с указанной особой точкой. В отличие от колебаний с частотой $0,64 \omega$, амплитуда устанавливающихся автоколебаний с частотой ω зависит от начальных условий, и эти колебания, вероятно, связаны с твердотельным вращением, причем среднее за период этих колебаний не связано непосредственно с особой точкой, соответствующей данным значениям параметров.

Приведенные выше данные позволяют также заключить, что в полном соответствии с общей теорией обыкновенных дифференциальных уравнений [3], с ростом закрытости особой точки при продвижении в глубь области неустойчивости (см. рис. 1) область притяжения предельного цикла колебаний с частотой $0,64 \omega$ постепенно уменьшается и совсем исчезает, поскольку при $\omega=11,06$ (см. рис. 2, *в*) предельный цикл уже неустойчив.

Таким образом, в зависимости от значений параметров в фазовом пространстве может существовать конечных размеров область притяжения предельного цикла автоколебаний с частотой $0,64 \omega$. Вне области притяжения этого предельного цикла устанавливаются регулярные автоколебания с частотой ω , которые существенно зависят от начальных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. [2] Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. [3] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию
16.06.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 2

УДК 538.56:519.25

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ САМОФОКУСИРОВКИ

С. М. Бабиченко, В. П. Кандидов

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Распространение излучения в реальных условиях сопровождается амплитудно-фазовыми искажениями, вызванными неоднородностями диэлектрической проницаемости среды, флуктуациями поля источника, нелинейными эффектами. Основные закономерности развития флуктуаций поля в кубичной нелинейной среде впервые получены в работе [1]. Аналитическое исследование задач нелинейной статистической оптики возможно при достаточно сильных ограничениях на статистику поля и уровень его флуктуаций [2, 3]. Широко используемое замкнутое уравнение для функции взаимной когерентности поля, полученное при расщеплении высших моментов поля, несправедливо в условиях мелкомасштабной самофокусировки, так как статистика поля сильно меняется [4]. При малом уровне флуктуаций применим метод возмущений. Этим методом исследован характер пространственных спектров флуктуаций уровня амплитуды плоской волны в кубичной случайно-неоднородной среде, получены асимптотические выражения для функции взаимной когерентности в двумерной задаче [5]. Наиболее полный численный анализ возможен методом статистических испытаний [6], который в задаче о мелкомасштабной самофокусировке требует больших затрат машинного времени. Поэтому представляет интерес качественное и количественное исследование приближенных уравнений для функций пространственной корреляции светового поля.

1. Система уравнений для первой $\Gamma_1 = \langle \xi(\mathbf{r}_1, z) \xi^*(\mathbf{r}_2, z) \rangle$ и второй $\Gamma_2 = \langle \xi(\mathbf{r}_1, z) \xi(\mathbf{r}_2, z) \rangle$ корреляционных функций поля в приближении параболической теории дифракции получена в работе [7]. Здесь ξ — малое комплексное возмущение плоской волны $E_0(|\xi| < 1, \langle \xi \rangle = 0)$. В случае статистически однородного случайного поля $\xi(\mathbf{r}, z)$ уравнения для Γ_1 и Γ_2 имеют вид

$$i\partial\Gamma_1/\partial z = \Gamma_2^* - \Gamma_2,$$