ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 2

УДК 534.2

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РЕФРАКЦИИ В ПЛОСКИХ ВОЛНОВОДАХ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

А. В. Сасковец
(кафедра акустики)

Наиболее рационально рассматривать решение обратных задач в случае, когда информация о рассеянном поле получена при нескольких частотах и конфигурациях облучающего поля. Для водоема конечной глубины еще одним, дополнительным каналом информации может служить модовая структура поля и связанная с ней возможность вести измерения раздельно на каждой моде.

Предположим, что слой жидкости ограничен сверху и снизу свободными поверхностями. Рассмотрим для такой задачи решение в адиабатическом приближении однородного волнового уравнения

$$\Delta p+\mathbf{k}^2 p=0, \tag{1}$$

где p — давление в волне; $\mathbf{k}$ — волновой вектор. В цилиндрических координатах, если записать p в виде $p=\varphi(z)\psi(\rho)$ и решить (1) методом разделения переменных, давление p может быть представлено как сумма так называемых нормальных волн (мод) [1]:

$$p(\rho, z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_p \sin\left[k(1-a_n^2)^{1/2} z\right] H_0^{(1)}(ka_n|\rho|),$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода, A_n — амплитуда n-й моды, а вертикальные собственные числа задачи a_n для случая свободной верхней границы и мягкого дна ($p=0|_{z=0}$; $p=0|_{z=h}$) определяются соотношением

$$a_n=\sqrt{1-\left(\frac{\pi n}{kh}\right)^2}.$$

Предположим теперь, что в среде распространяется лишь некоторая фиксированная мода с номером n_0, т. е.

$$p(\rho, z)=p_{n_0}(\rho, z)=A_{n_0} \sin\left[k(1-a_{n_0})^{1/2} z\right] H_0^{(1)}(ka_{n_0}|\rho|).$$

При такой постановке задача из трехмерной становится двумерной (поскольку зависимость от z в каждой точке известна) и в случае отсутствия внешних источников сводится к рассмотрению уравнения

$$\Delta_\rho\psi(\rho)+(ka_{n_0})^2\,\psi(\rho)=0. \tag{2}$$

Если глубина водоема неоднородна, т. е. $z=h(|\rho|, \varphi)$, то функцию $h(|\rho|, \varphi)$ можно представить в виде

$$h(|\rho|, \varphi)=h_0+h'(|\rho|, \varphi),$$

где $h_0=\mathrm{const}$.

Обозначим горизонтальное волновое число в невозмущенной среде

$$k_0^2\equiv k^2\left[1+\left(\frac{\pi n_0}{kh_0}\right)^2\right]. \tag{3}$$

а горизонтальное волновое число в области с неоднородностями глубины

$$(k')^2 \equiv k^2\left[1+\left(\frac{\pi n_0}{k(h_0+h')}\right)^2\right]. \tag{4}$$

Связывая между собой выражения (3) и (4), получим

$$(k')^2 = k_0^2-(\pi n_0)^2\left[\frac{1}{h_0^2}-\frac{1}{(h_0+h')^2}\right].$$

Так как $(k')^2 \equiv (ka_{n_0})^2$, то уравнение (2) можно переписать в виде

$$\Delta_\rho\psi(\rho)+k_0^2\psi(\rho)=\varepsilon\psi(\rho), \tag{5}$$

где

$$\varepsilon=(\pi n_0)^2\left[\frac{1}{h_0^2}-\frac{1}{(h_0+h')^2}\right]. \tag{6}$$

Для случая $h_0 \gg h'$ из (6), оставляя члены первого порядка малости по h', получим

$$\varepsilon \cong \frac{2(\pi n_0)^2}{h_0^3}h'.$$

Функцией Грина G задачи (5) является функция $G=-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_0|\rho|)$ [2], и, следовательно, решение (5) может быть записано в виде [3]

$$\psi(\rho_1)=\int\limits_S G(|\rho_1-\rho_2|)\,\varepsilon\psi(\rho_2)\,d\rho_2+\psi_0,$$

где $|\rho_1-\rho_2|$ — расстояние между точками 1 и 2, ψ_0 — падающее поле.

Таким образом, если считать, что области излучения, приема и локализации неоднородностей глубины водоема — непересекающиеся области конечного объема, то задача для функции $\psi(\rho)$ сводится к рассмотрению операторного уравнения [4]

$$\psi=Q[E-\varepsilon R]^{-1}\varepsilon Pf_0,$$

где ε определяется соотношением (6); f_0 определяет источники внешнего поля; Q, P, R — операторы распространения из области неоднородности глубины в область приема, из области излучения в область неоднородности и внутри области неоднородности соответственно.

Ядром операторов распространения является функция Грина

$$G=-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_0|\rho_i-\rho_j|).$$

Таким образом, для получения необходимой информации о неоднородностях дна в рассмотренной задаче можно использовать не только измерения при различных частотах и конфигурациях облучающего поля, как это делалось в [4, 5], но и данные на различных модах.

Использование различных мод при фиксированной частоте облучения приводит к тому, что для различных областей изменения глубины дна влияние этого изменения при соответствующем подборе номера моды можно сделать наиболее заметным.

В случае возможности изменения при измерениях как частоты, так и номера моды отличие между этими двумя параметрами заключается в том, что номер моды принимает конечное число значений, частота же является непрерывным параметром.

Поскольку решение задачи проводилось в рамках адиабатического приближения, это накладывает определенные ограничения на гладкость поверхности дна. Применимость такого приближения рассматривается, например, в [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Келлер Дж. Б., Пападакис Дж. С. Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980. [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. [3] Буров В. А., Горюнов А. А. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1977, 18, № 6, с. 95. [4] Байков С. В. и др. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1982, 23, № 6, с. 22. [5] Накаяма Дз. и др. ТИИЭР, 1979, 67, № 12, с. 100. [6] McDaniel S. T. J. Acoust. Soc. Am., 1982, 72, N 3, p. 916.

Поступила в редакцию
05.07.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 2

УДК 539.12.01

ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ФОКУСИРУЮЩЕМ ПОЛЕ КРИСТАЛЛА

Б. В. Холомай

(кафедра теоретической физики)

В настоящее время ведутся интенсивные теоретические и экспериментальные работы по исследованию движения и излучения заряженных частиц в кристаллах. Высокая частота фотонов, излучаемых из кристалла, предсказанная впервые Кумаховым [1], приводит к необходимости рассматривать излучение методами квантовой электродинамики. Такой анализ проводился в ряде работ [2—5] без учета спина электрона.

В настоящей работе излучение релятивистских электронов, движущихся в электростатическом поле, которое обеспечивает полную фокусировку частицы на оси движения, рассматривается с учетом спиновых свойств.

1. **Волновые функции.** Рассмотрим электрон, движущийся с релятивистской энергией вдоль оси z декартовой системы координат и фокусирующийся на оси движения электростатическим полем, потенциал которого представим в форме

$$\Phi(x, y)=\Phi_1(x)+\Phi_2(y). \tag{1}$$

Движение электрона будем описывать на основе уравнения Дирака

$$\left\{\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{e_0\Phi(x, y)}{c\hbar}+i(\alpha, \nabla)-\rho_3 k_0\right\}\Psi(\mathbf{r}, t)=0, \tag{2}$$

где $e=-e_0<0$, m_0 — соответственно заряд и масса электрона, α, ρ_3 — матрицы Дирака, $k_0=m_0c/\hbar$.

Получить точное решение уравнения Дирака (2) для фокусирующего электростатического поля не представляется возможным. Однако в режиме каналирования параметры, характеризующие отношение энергии взаимодействия электрона с поперечным полем к полной энергии, малы, т. е.