УДК 530.145

ЗАДАЧА ОБ АТОМЕ ВОДОРОДА В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В. В. Кислов

(кафедра теоретической физики)

1. В ряде работ [1, 2] рассматривалась модель дискретного пространства-времени, обладающая свойствами, соответствующими лоренц-инвариантности. При этом возникают понятия максимального импульса и фундаментальной длины, а операторы координат становятся некоммутирующими. В работах [1, 2] операторы координат определялись в некотором проективном пятимерном пространстве $\{\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_5\}$ с сигнатурой $(+----)$ через инфинитезимальные элементы группы пятимерных вращений, когда квадратичная форма

$$\eta^2=\eta_0^2-\eta_1^2-\eta_2^2-\eta_3^2-\eta_5^2 \tag{1}$$

остается инвариантной. Тогда

$$x_j=ia\left(\eta_5\frac{\partial}{\partial\eta_j}-\eta_j\frac{\partial}{\partial\eta_5}\right), \tag{2}$$

$$t=\frac{ia}{c}\left(\eta_5\frac{\partial}{\partial\eta_0}+\eta_0\frac{\partial}{\partial\eta_5}\right), \tag{3}$$

где a — фундаментальная длина, а операторы считаются эрмитовыми. Очевидно, что операторы координат в такой схеме имеют дискретный спектр, а время непрерывно. Операторы энергии-импульса обладают трансформационными свойствами операторов смещения и могут быть определены [2] через η путем проекции точек пятимерной гиперсферы на гиперплоскость $\eta_5=\text{const}$. В частности, снайдеровское определение $p_\mu=\dfrac{\hbar}{a}\dfrac{\eta_\mu}{\eta_5}$ может быть получено при проекции из центра гиперсферы на гиперплоскость $\eta_5=\hbar/a$ (рис. 1). Тогда оператор координаты x, например, запишется в виде

$$\hat{x}=i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial p_x}+\left(\frac{a}{\hbar}\right)^2 p_x p_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right]. \tag{4}$$

Возможны, однако, и другие способы проективного внесения метрики в p-пространство. Например, Фок показал [3], что в нерелятивистской задаче об атоме водорода реализуется $O(4)$-симметрия именно в η-представлении, впоследствии использованном Снайдером. Пространство импульсов получается при *стереографической проекции* точек гиперсферы в η-пространстве на гиперплоскость $\eta_5=\text{const}$ (см. рис. 1). Для обобщенной проекции Фока [4] имеем

$$p_\mu=\frac{\alpha\eta_\mu}{y_0-\eta_5}, \tag{5}$$

где α — расстояние от центра проекции до гиперплоскости, y_0 — радиус гиперсферы (рис. 2). Можно показать, что при определении операторов координат согласно (2)—(3) и внесении метрики в p-пространство согласно (5) принцип соответствия при переходе к стандартной квантовой механике при нахождении коммутационных соотношений

$[x_i, p_j]$ приводит к условию $\alpha = 2\hbar/a$. Однако при определении импульсного пространства согласно (5) для задачи об атоме водорода α имеет вполне определенный физический смысл [4] и потому фиксировано: $\alpha = \frac{mZe^2}{\hbar n}$. Тогда получим, что при рассмотрении задачи о нерелятивистском атоме водорода $a = \frac{2n}{Z} \frac{\hbar^2}{me^2} \sim r_{\text{бор}}$ и предельный переход к непрерывному пространству ($a \to 0$) в такой схеме невозможен. Предварительное обсуждение задачи об атоме водорода в схеме Снайдера дано в [5, 6].

Дальнейший анализ такой задачи приводит к выводу о том, что операторы координат должны определяться непосредственно в им-

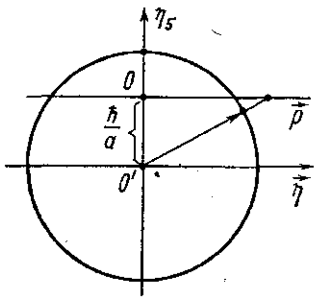

Рис. 1.

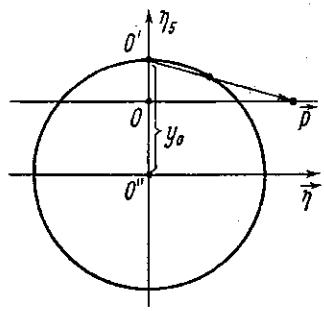

Рис. 2

пульсном представлении, а не в η-представлении Снайдера. При этом трансляционная инвариантность теории обеспечивается тем фактом, что 4-импульсы физических систем отсчитываются не от нуля, а от приписанного вакууму 4-импульса V_μ и наблюдаемыми становятся разности 4-импульсов [7].

В модели [7] рассматривалось импульсное пространство вида

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_6^2 = R^2, \tag{6}$$

где $R = \hbar/a$, a — фундаментальная длина. Если величины p_0, $\mathbf{p}$ выбраны в качестве независимых «координат» на поверхности (6), то $p_6 = \pm\sqrt{R^2 - p^2}$, $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2$. Генераторы группы SO (2, 3) для (6) составляют антисимметрический 5-тензор M^{KL} ($K, L = 0, 1, 2, 3, 5$). Компоненты $M^{\lambda\nu}$ ($\lambda, \gamma = \overline{0, 3}$) порождают лоренцевские повороты, а операторный 4-вектор

$$M^{\lambda 5} \equiv x^\lambda = i\hbar \sqrt{1 - \frac{p^2}{R^2}} \frac{\partial}{\partial p_\lambda} \tag{7}$$

генерирует сдвиги. Нетрудно убедиться, что оператор времени x^0 для (7) имеет дискретный спектр $\pm n$, где $n = 0, \pm 1, \dots$

Подход к постановке задачи атома водорода в такой схеме отличается от предложенного в работе [5], когда применялась схема Снайдера, недостатки которой неоднократно анализировались [7, 8]. Трудности данной схемы относятся скорее к трудностям нелокальной теории поля в целом, однако развитие математического аппарата такой теории [9] позволило поставить ее на тот же уровень строгости, что и локальную.

В работе [10] приведена оценка для ограничения сверху значения фундаментальной длины: $a \leqslant 10^{-24} \div 10^{-23}$ см.

2. С другой стороны, в настоящее время широко используется идея увеличения размерности пространства до шести с сигнатурой $(+----+)$ для единого описания гравитации, электромагнетизма и заряженной материи [11]. Вспоминая работу Янга [12], который предлагал рассматривать в качестве исходной группу шестимерных, а не пятимерных (в отличие от Снайдера) вращений в η-пространстве для обеспечения трансляционной инвариантности, мы внесем в нее следующие изменения.

Во-первых, вспоминая результаты п. 1, будем рассматривать группу вращений не в η-пространстве, а в пространстве импульсов.

Во-вторых, будем исходить из инвариантности теории относительно группы вращений $O\ (4,2)$: оказывается целесообразным вложить импульсное пространство $R_4(p)$ в 6-мерное пространство импульсов с сигнатурой $(+----+)$. При этом группа 6-мерных вращений $O(4,2)$ изоморфна [13] группе конформных преобразований и содержит в себе группу Лоренца, группу трансляций, группу дилатаций и группу специальных конформных преобразований.

В таком шестимерном пространстве можно развить аналогично п. 1 теорию с фундаментальной длиной, причем вариант (6) получится при рассмотрении так называемой 6-оптики:

$$p_0^2 + p_6^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_5^2 = 0 \tag{8}$$

в предположении $p_5 = R = \text{const}$. В случае $p_6 = R = \text{const}$ получим (для независимых p_0, $\mathbf{p}$)

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_5^2 = -R^2 \tag{9}$$

и, выбирая в качестве координат генераторы $M^{\lambda 5}$ группы $SO\ (4,1)$:

$$x^\lambda = i\hbar \sqrt{1 + p^2/R^2}\,\frac{\partial}{\partial p_\lambda}, \tag{10}$$

придем к схеме с дискретными координатами x_i и непрерывным временем. В общем случае при рассмотрении 6-оптики (8) теория допускает больше возможностей. Так, если выбрать в качестве независимых импульсов p_0, $\mathbf{p}$, p_5, то $p_6 = \pm p_5 \sqrt{1 - p^2/p_5^2}$, и тогда получим пять независимых координат $x_A = M_{6A}$, из которых одна — время — имеет дискретный спектр. Возможно также рассмотрение общей группы конформных преобразований $O(4,2)$ без условия (8), причем в предположении $p_6 = \text{const}$ получим обычное непрерывное пространство-время пятимерной теории поля [11]. Любопытно, что дополнительные измерения именно в импульсном пространстве допускают в единой теории [11] наглядное физическое толкование: так, в шестимерной теории поля пятая компонента импульса соответствует электрическому заряду.

Сопоставляя результаты исследования теорий с фундаментальной длиной [10] и единой теории гравитации, электромагнетизма и заряженной материи [11], можно фиксировать значение фундаментальной длины, зная величину $p_5 = \dfrac{ec}{2\sqrt{k}}$ (p_5 в теории [11] постоянно):

$$a = \frac{\hbar}{R} = \frac{2\sqrt{k}\,\hbar}{ec} = \frac{\hbar}{m_{\text{pl}}c} = 2\sqrt{\frac{\hbar c}{e^2}}\,e_{\text{pl}} \sim 10^{-32}\ \text{см},$$

где k — постоянная тяготения, m_{pl} — планковская масса.

3. Естественно, что в теориях с фундаментальной длиной появятся изменения в основных уравнениях физики: они станут особенно заметными при больших энергиях. В случае же невысоких энергий (кванто-

вая механика) операторы координат можно в первом приближении считать коммутирующими, однако появятся изменения, например, в задаче об атоме водорода. Действительно, в моделях (6), (9) с учетом (7), (10) теперь

$$x^{\mu} \approx i\hbar \sqrt{1 \mp \frac{m^2c^2}{R^2}} \frac{\partial}{\partial p_{\mu}}$$

для $p_0 = E/c \gg \mathbf{p}$, что фактически соответствует стандартной квантовой механике с перенормированной постоянной Планка: $\hbar \to \tilde{\hbar} = \hbar\sqrt{1 \mp m^2/m_{\rm pl}^2}$ соответственно для (6) и (9), где $m/m_{\rm pl} \sim 10^{-20}$. Вместо известной формулы для уровней энергии атома водорода получим

$$E \simeq mc^2 \left[1 - \frac{Z^2e^4}{2n^2c^2\hbar^2}\left(1 \pm \frac{m^2}{m_{\rm pl}^2}\right) - \frac{Z^4e^8}{2n^4\hbar^4c^4}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)\left(1 \pm \frac{2m^2}{m_{\rm pl}^2}\right)\right]. \tag{11}$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук Ю. С. Владимирову за неизменное внимание, многочисленные обсуждения и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Snyder H. Phys. Rev., 1947, 71, p. 38. [2] Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970. [3] Фок В. А. Изв. АН СССР, 1935, 2, с. 169. [4] Владимиров Ю. С., Кислов В. В. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1984, 25, № 1, с. 11. [5] Кард П. ЖЭТФ, 1950, 20, с. 1144. [6] Мир-Касимов Р. М. ЖЭТФ, 1967, 52, с. 533. [7] Кадышевский В. Г. В кн.: Проблемы теоретической физики. (Посвящена памяти акад. И. Е. Тамма). М.: Наука, 1972. [8] Авербах В. Л., Медведев Б. В. ДАН СССР, 1949, 64, № 1, с. 41. [9] Ефимов Г. В. Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М.: Наука, 1977. [10] Кадышевский В. Г. ЭЧАЯ, 1980, 11, № 1, с. 5. [11] Владимиров Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. [12] Yang C. Phys. Rev., 1947, 72, p. 874. [13] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию
13.06.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 3

УДК 556.535.2

МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ПРИБРЕЖНОЙ СТРУИ В ПРЯМОМ РУСЛОВОМ ПОТОКЕ

О. Н. Мельникова, Г. Г. Хунджуа

(кафедра физики моря и вод суши)

Известно, что в прибрежной области русловых потоков наблюдаются струи, распространяющиеся вдоль берегов и не смешивающиеся с центральной частью потока (такие струи хорошо видны в естественных условиях при окрашивании их примесями). Между тем течение жидкости в русловых потоках является турбулентным и должно характеризоваться интенсивным перемешиванием. В связи с этим в работе [1] было высказано предположение, что существование прибрежных струй в русловых потоках связано с наличием так называемой жидкой границы, на которой турбулентный обмен практически отсутствует,