топологически эквивалентных участках его, была получена плотность распределения вероятностей «амплитуд» A генерируемых колебаний $W(A)$. Гистограммы, представленные на рис. 2, получены при $\mu=\{1{,}7;\ 1{,}3;\ 1{,}001\}$. Из рис. 2 видно, что по мере уменьшения степени хаотичности, т. е. при $\mu\to 1$, странный аттрактор дробится на топологически эквивалентные участки, а фазовая точка блуждает между ними, находясь всегда на одном из этих участков.

Таким образом, поведение системы за границей «хаоса» характеризуется определенными закономерностями, которые проявляются как в спектральном составе, так и в распределении амплитуд генерируемых колебаний. Вблизи границы зоны стохастичности спектр колебаний близок к линейчатому, а значения амплитуд сосредоточены на очень узких участках. По мере углубления в «хаос» спектр приближается к сплошному, а амплитуды генерируемых колебаний все более равномерно заполняют отрезок [—1,1].

Эти особенности, видимо, характерны для всех стохастических автоколебательных систем, процессы в которых приближенно могут быть описаны одномерным невзаимно-однозначным отображением. Известно, что такое описание справедливо для ряда систем третьего порядка, например системы уравнений Лоренца [4] и ей подобных [5].

Некоторые результаты данного исследования экспериментально были подтверждены в работе [6] для генераторов с инерционной нелинейностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Eckman J. P. Rev. Mod. Phys., 1981, **53**, N 4, p. 643. [2] Ott E. Rev. Mod. Phys., 1981, **53**, N 4, p. 655. [3] Feigenbaum M. J. J. of Stat. Phys., 1978, **19**, N 1, p. 25. [4] Lorenz E. N. J. Atmos. Sci., 1963, **20**, p. 130. [5] Ланда П. С., Ольховой А. Ф., Перминов С. М. Изв. вузов. Радиофизика, 1983, № 5, с. 566. [6] Астахов В. В. Автореф. канд. дис. Саратов, 1983.

Поступила в редакцию
03.10.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 3

УДК 530.12

ИЗМЕРИМОСТЬ НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Д. Д. Иваненко, Ю. Н. Обухов

(кафедра теоретической физики)

Хорошо известно, что электромагнитное поле может быть измерено в принципе сколь угодно точно, если для этого использовать пробные тела с произвольно большим электрическим зарядом [1]. Однако аналогичный анализ измеримости метрического гравитационного поля показывает, что в рамках ОТО существует абсолютный предел точности: неопределенность в измерении метрики (а также ее связности — символов Кристоффеля и римановой кривизны) ограничена снизу величиной планковской длины $l^*=\sqrt{\hbar G/c^3}=10^{-33}$ см [2]. Почему возникает такое качественное отличие двух фундаментальных теорий? В работах [2] указываются две возможные причины: 1) нелинейность гравитационной теории и 2) наличие в ней размерной константы связи. В данной заметке мы покажем, что критической является только вторая причина. Для этого рассмотрим еще один важный класс полей — переносчиков взаимодействий — неабелевы калибровочные поля. Исследование проблемы их измеримости интересно тем, что соответствующая теория занимает как бы промежуточное положение между электромагнетизмом и ОТО: она нелинейна, но не содержит размерных констант связи. Кроме того, следует иметь в виду дальнейшие приложения к анализу измеримости калибровочного гравитационного поля [3], когда на пространстве-времени задана нериманова геометрия (вообще говоря, с кручением и неметричностью).

Рассмотрим произвольное неабелево калибровочное поле A_μ*. Это элемент алгебры Ли калибровочной группы, задающий связность в соответствующем главном расслоении [4]; напряженность $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+g[A_\mu, A_\nu]$ есть кривизна в этом расслоении, где g — безразмерная константа связи. В базисе T_a алгебры Ли $A_\mu = A_\mu^a T_a$, $F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c) T_a$, где f_{bc}^a—структурные константы, $[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c$.

Исследование измеримости калибровочного поля мы будем проводить в тесной аналогии с анализом Бора и Розенфельда [1]. Измеримыми величинами в таком подходе являются усредненные по пространственно-временным областям значения полей, а сам процесс их измерения можно реализовать как наблюдение за движением пробных тел.

Источником неабелевых калибровочных полей является, вообще говоря, квантовая материя. Поэтому пробные классические тела и их взаимодействие с A_μ являются определенной идеализацией реальной физической системы. В простейшем случае, которым мы ограничимся, материю можно описать как «пыль» из пробных частиц с внутренними степенями свободы (цветом, изоспином, спином и др.), которая характеризуется тензорами энергии-импульса и калибровочного тока

$$T^{\mu\nu}=\rho u^\mu u^\nu, \quad J^\mu = q u^\mu, \tag{1}$$

где $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ — 4-скорость, ρ — плотность массы, а q — плотность классического калибровочного заряда пробных частиц. Последнюю можно рассматривать как вектор $q=q^a T_a$ во внутреннем (цветном, изоспиновом и т. п.) пространстве калибровочных степеней свободы. Как показано в [5, 6], из законов сохранения в полной теории (калибровочное поле+пыль) вытекают следующие уравнения движения пробных тел в неабелевом калибровочном поле:

$$\rho \frac{Du^\mu}{D\tau} = f^\mu_{\cdot\nu} u^\nu, \tag{2}$$

$$\frac{Dq}{D\tau} = \frac{dq}{d\tau} + [A_\mu, q]\, u^\mu = 0, \tag{3}$$

где $f_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu} q)$, $D/D\tau = u^\mu \nabla_\mu$, ∇_μ — калибровочная производная. Уравнениям (1)—(3) можно придать более строгое обоснование в рамках квазиклассического перехода от уравнения Дирака для (цветных, изоспиновых и т. п.) спинорных полей, взаимодействующих с A_μ, к движению классических нерелятивистских частиц [6]. В этом случае все классические величины следует понимать как квантовые средние от соответствующих операторов по состоянию типа волнового пакета (например, калибровочный заряд $q^a = \langle\psi|T^a|\psi\rangle$, где T^a — генераторы соответствующего представления калибровочной группы).

В калибровочной теории прежде чем решать уравнения поля, де-

---

* Греческие индексы μ, ν, ...=0, 1, 2, 3 соответствуют координатам пространства времени, а латинские a, b, c, ... — параметрам калибровочной группы (т. е. «внутренним» координатам).

лать физические предсказания или тем более измерять физические величины, необходимо зафиксировать калибровку, т. е. задать систему отсчета в пространстве-времени и во внутреннем пространстве. Пусть определенная калибровка выбрана. Тогда величину калибровочных полей можно определять из (2)—(3) по наблюдениям за движением пробных частиц (1).

Пусть за (собственное) время T частица в калибровочном поле переместилась в пространстве на Δx^{μ}, а вектор q^a «повернулся» (во внутреннем пространстве) на угол $\Delta\varphi^a$. (Заметим, что для полупростых групп q^a действительно вращается, поскольку из (3) имеем $\frac{D}{D\tau}(q_a q^a) = 0.$) Измерив импульс частицы p и ее заряд q^a в начале и в конце временного интервала T, определим A_μ и $F_{\mu\nu}$ из (2)—(3).

Возникает вопрос: насколько точно можно измерить калибровочное поле из таких наблюдений? Если, как обычно [1], выбрать тело достаточно тяжелым, то его ускорение можно сделать как угодно малым. Тогда, дополнительно выбирая время измерения импульса и заряда малым ($\ll T$), можно уменьшить до любой требуемой точности обратное действие калибровочного поля, излученного пробным телом. (Об излучении цвета ускоренными пробными калибровочными зарядами см. [7].) Следовательно, единственным неконтролируемым фактором останется только квантовомеханическая неопределенность положения тела (в пространстве и во внутреннем пространстве): $\Delta p \Delta x \geqslant \hbar$, $\Delta q \Delta \varphi \geqslant \hbar$. Его учет приводит к окончательным оценкам для неточностей измерения калибровочных полей ΔA_μ и $\Delta F_{\mu\nu}$ [5]:

$$g\Delta A^a_\mu \Delta x^\mu \Delta\varphi^b f^{abc} q^c \geqslant \hbar, \quad g\Delta F^a_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu q^a \geqslant \hbar, \tag{4}$$

(по греческим индексам нет суммирования).

Таким образом, основной вывод, вытекающий из анализа (4), полностью аналогичен результату Бора и Розенфельда [1]: неабелево калибровочное поле измеримо в принципе сколь угодно точно, несмотря на нелинейность теории; для этого достаточно использовать пробные тела с большим калибровочным зарядом. Следует отметить, что в данной работе мы рассматривали проблему на качественном уровне, однако окончательные результаты можно доказать и вполне строго в рамках мысленных экспериментов с использованием компенсирующих механизмов в духе [1]; детали этого исследования будут опубликованы отдельно.

Применение наших результатов в калибровочной теории гравитации [3] позволяет сделать вывод о точной измеримости локальной лоренцевой связности (с кручением) и кривизны Римана—Картана с помощью пробных тел с большим спином [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Bohr N., Rosenfeld L. Kgl. Danske Vid. Selsk., 1933, **12**, N 8, p. 3. [2] Бронштейн М. П. ЖЭТФ, 1936, **6**, с. 195; Тредер Х.-Ю. В кн.: Астрофизика, кванты и теория относительности. М.: Мир, 1982, с. 469; Redge T. Nuovo Cim., 1958, **7**, N 1, p. 215. [3] Hehl F. W. et al. Rev. Mod. Phys., 1976, **48**, N 3, p. 393. Ivanenko D. In: Relativity, Quanta and Cosmology. V. 1. N. Y.: Johnson Reprint Corporation, 1980, p. 295. [4] Daniel M., Viallet C. M. Rev. Mod. Phys., 1980, **52**, N 1, p. 175. [5] Обухов Ю. Н. В кн.: Тез. докл. 5-й Всесоюз. гравитац. конф. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 65; Ivanenko D., Obukhov Yu. On the measurability of non-abelian gauge fields. Timisoara, 1982. (Preprint / Timisoara Univ.: UTFT-1). [6] Wong K. Nuovo Cim., 1970, **65 A**, N 4, p. 689; Duval C., Horvathy P. Ann. Phys., 1982, **141**, p 3; Arodz H. Phys. Lett., 1982, **B 116**, N 4, p. 251. [7] Trautman A. Acta Phys. Austr., Suppl., 1981, **23**, p. 401.

Поступила в редакцию 12.10.83