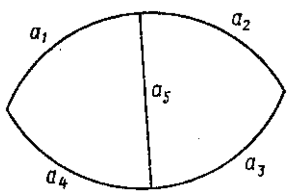
УДК 539.12.01

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА БАЗОВЫХ ДИАГРАММ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В. В. Белокуров, Н. И. Усюкина

(НИИЯФ)

Достигнутый в последние годы прогресс в вычислении фейнмановских диаграмм [1—8] позволил перейти к исследованию достаточно высоких порядков теории возмущений. (Обоснование необходимости вычислений в старших порядках см., например, в [1, 2].) Встречающиеся при этом диаграммы зачастую имеют сложную топологическую структуру, и поэтому довольно естественна наблюдаемая при их вычислении тенденция к использованию методов, тем или иным способом сводящих исходные диаграммы к более простым [2—7].



Для широкого класса диаграмм, встречающихся в ренормгрупповых вычислениях, при расчете критических индексов и в ряде других задач, результатом таких сведений являются двухпетлевые диаграммы, изображенные на рисунке. Другими словами, эти диаграммы являются в определенном смысле базовыми для диаграмм более высоких порядков.

Обратим внимание, что рассматриваются лишь безмассовые диаграммы. Это связано с тем замечательным обстоятельством, что в широко используемых MS-схемах ренормировки контрчлены зависят от масс степенным образом, и для определения высокоэнергетического поведения существенны именно безмассовые диаграммы. Указанный факт позволяет значительно упростить вычисления, поскольку безмассовые пропагаторы имеют степенное поведение как в импульсном, так и в координатном пространствах.

Отмеченные на рисунке параметры a, называемые индексами линий, представляют собой степени безмассовых пропагаторов в координатном пространстве $1/(x^2-i0)^a$. При этом, как легко заметить, произведение и свертка в координатном пространстве двух линий с индексами a_1 и a_2 имеют индексы, равные соответственно a_1+a_2 и a_1+a_2-2. В работе всюду размерность пространства положена равной четырем, однако дальнейшие формулы могут быть переписаны и для произвольной размерности D.

Совокупность диаграмм рисунка с произвольными индексами a_i разбивается на классы эквивалентности по отношению к рассмотренной в работе [3] точечной группе преобразований, определенным образом изменяющих параметры a_i. Если известно значение диаграммы рисунка с некоторым набором параметров a_i, то тем самым известны и значения всех других диаграмм того же класса, так как они пропорциональны друг другу (коэффициенты, выписанные в работе [3], представляют собой произведения и отношения Г-функций).

Представителями простейших классов являются диаграммы, имеющие «уникальность» ($a_1+a_2+a_5=4$), а также диаграммы, содержащие три «полууникальности» ($a_1+a_2+a_5=a_3+a_4+a_5=a_1+a_4+a_5=3$). Такие диаграммы без труда интегрируются любым из известных методов.

Другой класс диаграмм, вычисление которых также достаточно просто, задается диаграммой с индексами $a_1=1+\alpha$, $a_2=1+\beta$, $a_3=a_4=a_5=1$.

Вместе с тем в пятипетлевых ренормгрупповых вычислениях в модели φ^4 [7, 8], в расчетах критических индексов в $1/n$-разложении [9] и в ряде других задач встречается диаграмма типа $a_1=a_2=a_3=a_4=1$, $a_5=1+\alpha$, вычисление которой указанными выше методами сталкивается с принципиальными трудностями.

Ниже мы приведем непосредственное вычисление этой диаграммы, используя полученное в работе [10] представление Меллина для треугольной диаграммы.

Разлагая один из треугольников диаграммы рисунка в кратные меллиновские интегралы и выполняя свертку с оставшимися линиями, получим для изучаемой диаграммы выражение

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}J=\int\limits_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}da\int\limits_{b_0-i\infty}^{b_0+i\infty}db\,\frac{\Gamma(a-\alpha)\Gamma(b-\alpha)\Gamma(a+b)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma^2(1+\alpha-a-b)}{ab\,\Gamma(2-a-b)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}. \qquad (1)$$

Для краткости здесь явно выписано лишь значение диаграммы, т. е. опущена степень внешнего импульса $(k^2)^{-1+\alpha}$. Опущены также нормировочные множители, представляющие собой степени 2, π, i.

Нетрудно видеть, что выражение (1) можно привести к четырехкратному параметрическому интегралу

$$J=\int\limits_0^\infty\frac{dx\cdot x^{-\alpha}}{(1+x)^{1-\alpha}}\int\limits_0^\infty\frac{dy}{y(1+x+y)^{1+\alpha}}\int\limits_0^y\frac{d\xi}{(1+\xi)^{1-\alpha}}\int\limits_0^y\frac{d\tau}{(1+\tau)^{1-\alpha}}.$$

Удобно представить J в виде $J=J_1-J_2$,

где $$J_1=\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{dx\cdot x^{-\alpha}}{(1+x)^{1-\alpha}}\int\limits_0^\infty\frac{dy}{y(1+x+y)^{1+\alpha}}\int\limits_0^y\frac{d\xi}{(1+\xi)^{1-2\alpha}},$$

$$J_2=\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{dx\cdot x^{-\alpha}}{(1+x)^{1-\alpha}}\int\limits_0^\infty\frac{dy}{y(1+x+y)^{1+\alpha}}\int\limits_0^y\frac{d\xi}{(1+\xi)^{1-\alpha}}.$$

J_1 легко вычисляется с помощью стандартной замены переменных: $x=(1+y)t$, $t=1/z$ и имеет вид

$$J_1=\frac{2}{\alpha^2}\frac{d}{d\alpha}[\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)]=$$
$$=\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}\right)\left\{\psi\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-\psi\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\psi\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)-\psi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\right\}.$$

Для вычисления J_2 заметим, что его меллин-образ равен

$$\mathcal{M}[J_2]=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\frac{\Gamma(a)\Gamma(a-\alpha)\Gamma^2(1+\alpha-a)}{a}+\frac{\Gamma(a)\Gamma(a-\alpha)\Gamma^2(1+\alpha-a)}{(1-a)}\right\}.$$

Восстанавливая теперь по известному меллин-образу саму функцию, что можно сделать, например, с помощью справочников [11, 12], получим

$$J_2=\frac{2}{\alpha^3}[\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)-1]-\frac{2}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left[\psi\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\psi\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{\alpha^2}\left\{\psi\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-\psi\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+\psi\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)-\psi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\right\}-$$

$$-\frac{2}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left[\psi\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\psi\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right].$$

Таким образом,

$$J=\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left\{\psi\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)+\psi\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\psi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)-\psi\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right\}=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha^{n-2}\zeta(n+1)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)[1+(-1)^n]. \tag{2}$$

Мы благодарны Д. И. Казакову, определившему значение данной диаграммы методом функциональных уравнений и сообщившему результаты своей работы до опубликования, а также Н. А. Свешникову, познакомившему нас с монографией [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V. Nucl. Phys., 1980, **B174**, p. 345. [2] Chetyrkin K. G., Tkachov F. V. Nucl. Phys., 1981, **B192**, p. 159. [3] Васильев А. Н., Письмак Ю. М., Хонконен Ю. Р. ТМФ, 1981, 47, с. 291. [4] Усюкина Н. И. ТМФ, 1983, **54**, с. 124. [5] Belokurov V. V., Ussyukina N. I. J. Phys. A: Math. Gen., 1983, 16, p. 2811. [6] Belokurov V. V., Ussyukina N. I. Acta Phys. Polon., 1983, **B 14**, N 10, p. 747. [7] Kazakov D. I. JINR preprint E2-83-323. Dubna, 1983. [8] Горишний С. Г., Ларин С. А., Ткачев Ф. В., Четыркин К. Г. Препринт ОИЯИ Р2-83-546. Дубна, 1983. [9] Васильев А. Н., Письмак Ю. М., Хонконен Ю. Р. ТМФ, 1982, **50**, с. 195. [10] Усюкина Н. И. ТМФ, 1975, **22**, с. 300. [11]. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск, 1978. [12] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
14.10.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1984, т. 25, № 3

УДК 621.373.7

О СВОЙСТВАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В КОНТУРЕ СО СКАЧКООБРАЗНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ЕМКОСТИ

В. П. Комолов, Д. А. Тищенко, П. Н. Шашков

(кафедра радиофизики СВЧ)

Рассмотрим колебательный контур, емкость C которого изменяется скачкообразно с периодом $T_M=T_\alpha+T_\beta$, принимая постоянные значения C_α на интересах времени T_α и C_β на интервалах T_β. При определенных соотношениях между параметрами контура (L, C, R) и длительностями T_α и T_β, на которых собственные частоты соответственно равны $\omega_\alpha=[(LC_\alpha)^{-2}-\delta^2]^{1/2}$, $\omega_\beta=[(LC_\beta)^{-2}-\delta^2]^{1/2}$, где $\delta=R/(2L)$, в нем могут возбуждаться параметрические колебания. В балансном контуре с прямоугольной импульсной накачкой [1] при $\omega_\alpha/(2\pi)=200$ кГц и $\omega_\beta/(2\pi)=400$ кГц экспериментально наблюдалось 65 областей возбуждения, сгруппированных в 16 зон. Соотношения, определяющие границы областей возбуждения такого контура, описаны в [2], где показано, что в общем решении соответствующего уравнения Хилла для заряда q*

$$q(t)=a_0\exp[(h-\delta)t]\chi(t)+b_0\exp[-(h+\delta)t]\chi(-t), \tag{1}$$

* При записи (1) подразумевается, что начало отсчета времени выбрано в середине интервала T_α или T_β, т. е. прямоугольная модулирующая функция симметрична относительно $t=0$.