

$$-\frac{2}{\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left[\Psi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) - \Psi \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \right].$$

Таким образом,

$$J = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left\{ \Psi \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) + \Psi \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) - \Psi \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) - \Psi \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \right\} = \\ = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha^{n-2} \zeta(n+1) \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) [1 + (-1)^n]. \quad (2)$$

Мы благодарны Д. И. Казакову, определившему значение данной диаграммы методом функциональных уравнений и сообщившему результаты своей работы до опубликования, а также Н. А. Свешникову, познакомившему нас с монографией [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V. Nucl. Phys., 1980, B174, p. 345. [2] Chetyrkin K. G., Tkachov F. V. Nucl. Phys., 1981, B192, p. 159. [3] Васильев А. Н., Письмак Ю. М., Хонконен Ю. Р. ТМФ, 1981, 47, с. 291. [4] Усюкина Н. И. ТМФ, 1983, 54, с. 124. [5] Belokurov V. V., Ussyukina N. I. J. Phys. A: Math. Gen., 1983, 16, p. 2811. [6] Belokurov V. V., Ussyukina N. I. Acta Phys. Polon., 1983, B14, N 10, p. 747. [7] Kazakov D. I. JINR preprint E2-83-323. Dubna, 1983. [8] Горишний С. Г., Ларин С. А., Ткачев Ф. В., Четыркин К. Г. Препринт ОИЯИ P2-83-546. Дубна, 1983. [9] Васильев А. Н., Письмак Ю. М., Хонконен Ю. Р. ТМФ, 1982, 50, с. 195. [10] Усюкина Н. И. ТМФ, 1975, 22, с. 300. [11] Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск, 1978. [12] Прудников А. П., Бричков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
14.10.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 3

УДК 621.373.7

О СВОЙСТВАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В КОНТУРЕ СО СКАЧКООБРАЗНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ЕМКОСТИ

В. П. Комолов, Д. А. Тищенко, П. Н. Шашков

(кафедра радиофизики СВЧ)

Рассмотрим колебательный контур, емкость C которого изменяется скачкообразно с периодом $T_M = T_\alpha + T_\beta$, принимая постоянные значения C_α на интересах времени T_α и C_β на интервалах T_β . При определенных соотношениях между параметрами контура (L , C , R) и длительностями T_α и T_β , на которых собственные частоты соответственно равны $\omega_\alpha = [(LC_\alpha)^{-2} - \delta^2]^{1/2}$, $\omega_\beta = [(LC_\beta)^{-2} - \delta^2]^{1/2}$, где $\delta = R/(2L)$, в нем могут возбуждаться параметрические колебания. В балансном контуре с прямоугольной импульсной накачкой [1] при $\omega_\alpha/(2\pi) = 200$ кГц и $\omega_\beta/(2\pi) = 400$ кГц экспериментально наблюдалось 65 областей возбуждения, сгруппированных в 16 зон. Соотношения, определяющие границы областей возбуждения такого контура, описаны в [2], где показано, что в общем решении соответствующего уравнения Хилла для заряда q^*

$$q(t) = a_0 \exp[(h - \delta)t] \chi(t) + b_0 \exp[-(h + \delta)t] \chi(-t), \quad (1)$$

* При записи (1) подразумевается, что начало отсчета времени выбрано в середине интервала T_α или T_β , т. е. прямоугольная модулирующая функция симметрична относительно $t=0$.

где $\chi(t)$ — ограниченная функция с периодом T_M , a_0, b_0 — константы, определяемые начальными условиями, характеристический показатель определяется соотношением $h = \frac{1}{T_M} \operatorname{arch} P$, где

$$P = \cos \omega_\alpha T_\alpha \cos \omega_\beta T_\beta - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_\beta} + \frac{\omega_\beta}{\omega_\alpha} \right) \sin \omega_\alpha T_\alpha \sin \omega_\beta T_\beta.$$

Поскольку в областях возбуждения характеристический показатель принято считать действительным (см., например, [3]), введя $\mu = \frac{1}{T_M} \operatorname{arch} |P|$, приходим к другой записи решения (1):

$$q(t) = a_0 \exp[(\mu - \delta)t] \Phi(t) + b_0 \exp[-(\mu + \delta)t] \Phi(-t), \quad (2)$$

где $\Phi(t)$ — ограниченная функция с периодом T_M при $P > 0$ и с периодом $2T_M$ при $P < 0$.

В реальном контуре зависимость (2) описывает начальный участок нарастания колебаний, когда контур можно считать линейным на каждой из частот (рис. 1). Затем амплитуда колебаний выходит на стационарное значение Q_0 благодаря диссипативному или/и расстройному ограничению. При этом $q(t) = \pm Q_0 \Phi(t)$, причем знак плюс соответствует положительному значе-

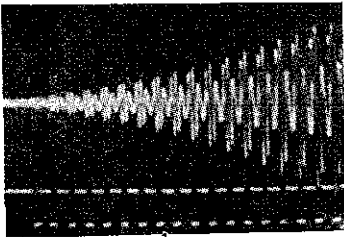


Рис. 1. Осциллограмма нарастания параметрических колебаний в контуре. Нижний луч — параметрирующее напряжение

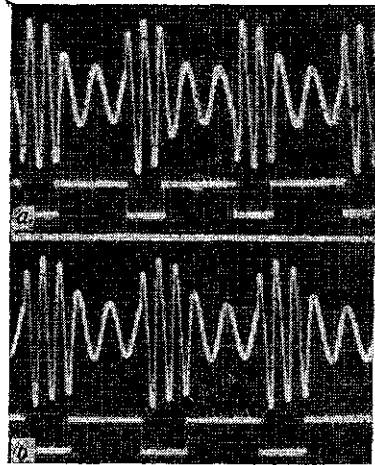


Рис. 2. Осциллограммы стационарных параметрических колебаний: а — 9-я зона возбуждения, частота модуляции $\rho_m/2\pi = 59$ кГц; б — 10-я зона возбуждения, $\rho_m/2\pi = 55$ кГц

нию a_0 , минус — отрицательному. Таким образом, возбуждаемому параметрическому контуру со скачкообразной модуляцией емкости присущи триггерные свойства. Такой контур обладает двумя устойчивыми состояниями, определяющимися начальными условиями и характеризующимися различными знаками мгновенных значений колебаний в фиксированные моменты времени. Это свойство аналогично квантованию фазы параметрических колебаний, аппроксимированных одним гармоническим тоном, которое обнаружено в параметрических генераторах [4] и нелинейных волноводных линиях [5].

В рассматриваемом контуре квантование фазы осуществляется для каждой из гармонических составляющих колебаний. Представив

$\Phi(t)$ в виде ряда Фурье:

$$\Phi(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(kpt - \varphi_k), \quad (3)$$

где $p = 2\pi/T_M$ или π/T_M , а c_k , φ_k однозначно определены видом $\Phi(t)$, для $q(t)$ в стационарном режиме запишем

$$q(t) = Q_0 \left\{ \pm c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos[kpt - \varphi_k + (0, \pi)] \right\}.$$

Отсюда видно, что начальные фазы всех гармонических составляющих принимают значения либо $-\varphi_k$ при $a_0 > 0$, либо $-\varphi_k + \pi$ $a_0 < 0$.

Рассмотрим спектральные свойства возбуждаемых колебаний. Запишем функцию $\Phi(t)$ на любом из дискретных интервалов T_α , T_β , выбирая начало отсчета текущего времени (t_α , t_β) в начале каждого интервала:

$$\Phi(t_\alpha, t_\beta) = \begin{cases} A_\alpha \cos(\omega_\alpha t_\alpha - \varphi_\alpha) & \text{при } t \in T_\alpha, \\ A_\beta \cos(\omega_\beta t_\beta - \varphi_\beta) & \text{при } t \in T_\beta, \end{cases}$$

где A_α , A_β — амплитуды и φ_α , φ_β — начальные фазы колебаний на интервалах T_α и T_β соответственно. Заметим, что в случае, когда $\Phi(t)$ имеет период $2T_M$, начальные фазы чередуются, принимая попеременно значения φ_α , φ_β и $\varphi_\alpha + \pi$, $\varphi_\beta + \pi$. Учитывая непрерывность $\Phi(t)$ и $d\Phi(t)/dt$ в моменты скачков емкости, обусловленную непрерывностью заряда и тока, получим

$$\operatorname{tg} \varphi_\beta = (\cos \theta_\alpha - \exp(\mu T_M) \cos \theta_\beta) / \left(\frac{\omega_\beta}{\omega_\alpha} \sin \theta_\alpha + \exp(\mu T_M) \sin \theta_\beta \right), \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_\alpha + \theta_\alpha) = \frac{\omega_\beta}{\omega_\alpha} \operatorname{tg} \varphi_\beta, \quad (5)$$

$$A_\beta = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_\beta)^{1/2}, \quad (6)$$

$$A_\alpha = [1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_\alpha + \theta_\alpha)]^{1/2}, \quad (7)$$

где $\theta_\alpha = \omega_\alpha T_\alpha$, $\theta_\beta = \omega_\beta T_\beta$ — фазовые набегі колебаний на интервалах T_α и T_β соответственно. На рис. 2 а, б приведены осциллограммы управляющего напряжения (нижний луч) и выходных напряжений $U(t) = q(t)/C(t)$ балансного контура. Из рис. 2, а видно, что функция $\Phi(t)$, описывающая колебания в контуре, имеет период $2T_M$, равный удвоенному периоду модуляции. Этот случай соответствует попаданию параметрической точки в пространстве $(\theta_\alpha, \theta_\beta, m = (C_\alpha - C_\beta)/(C_\alpha + C_\beta))$, рассмотренном в [2], в зону

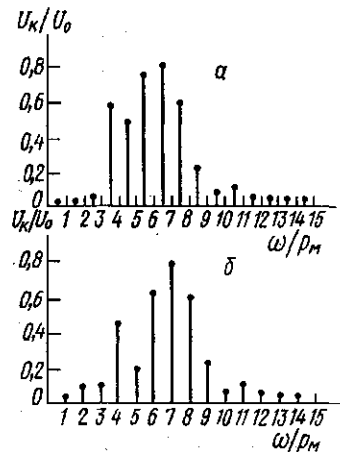


Рис. 3. Спектры колебаний: а — 9-я зона возбуждения; спектр содержит гармоники на частотах, кратных $\rho_m/2$, характерно отсутствие гармоник, кратных частоте модуляции ρ_m , которое присуще всем нечетным зонам возбуждения; б — 10-я зона возбуждения; спектр состоит из гармоник на частотах, кратных частоте модуляции ρ_m (U_k/U_0 — приведенные амплитуды спектральных составляющих)

возбуждения с нечетным номером n^* ($n=9$). На рис. 2, б показаны колебания в десятой зоне возбуждения, которые, как и в других четных зонах, описываются функцией с периодом T_M .

Зная вид $\Phi(t)$, определим c_0 , a_k , b_k — коэффициенты разложения ее в ряд Фурье:

$$\Phi(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kpt + b_k \sin kpt),$$

где частота $p=2\pi/T_M$ для четных зон возбуждения равна частоте модуляции емкости, для нечетных областей $p=\pi/T_M$ равна ее субгармонике:

$$c_0 = \left| \cos \frac{pT_M}{2} \right| \left[A_\alpha \frac{T_\alpha}{T_M} \operatorname{sinc}(\omega_\alpha T_\alpha/2) \cos(3\omega_\alpha T_\alpha/2 + \varphi_\alpha) + \right. \\ \left. + A_\beta \frac{T_\beta}{T_M} \operatorname{sinc}(\omega_\beta T_\beta/2) \cos(\omega_\beta T_\beta/2 - \varphi_\beta) \right], \\ a_k = \left| \sin \left(\frac{kpT_M}{2} \right) \right| \left\{ \frac{A_\alpha T_\alpha}{T_M} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_\alpha + pk}{2} T_\alpha \right) \cos \left(\frac{\omega_\alpha + pk}{2} T_\alpha + \varphi_\alpha + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \omega_\alpha T_\alpha \right) + \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_\alpha - pk}{2} T_\alpha \right) \cos \left(\frac{\omega_\alpha - pk}{2} T_\alpha + \varphi_\alpha + \omega_\alpha T_\alpha \right) \right] + \\ \left. + \frac{A_\beta T_\beta}{T_M} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_\beta + pk}{2} T_\beta \right) \cos \left(\frac{\omega_\beta + pk}{2} T_\beta - \varphi_\beta \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_\beta - pk}{2} T_\beta \right) \cos \left(\frac{\omega_\beta - pk}{2} T_\beta - \varphi_\beta \right) \right] \right\}, \\ b_k = \left| \sin \left(\frac{kpT_M}{2} \right) \right| \left\{ \frac{A_\alpha T_\alpha}{T_M} \left[-\operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_\alpha + pk}{2} T_\alpha \right) \sin \left(\frac{\omega_\alpha + pk}{2} T_\alpha + \varphi_\alpha + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \omega_\alpha T_\alpha \right) + \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_\alpha - pk}{2} T_\alpha \right) \sin \left(\frac{\omega_\alpha - pk}{2} T_\alpha + \varphi_\alpha + \omega_\alpha T_\alpha \right) \right] + \\ \left. + \frac{A_\beta T_\beta}{T_M} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_\beta + pk}{2} T_\beta \right) \sin \left(\frac{\omega_\beta + pk}{2} T_\beta - \varphi_\beta \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_\beta - pk}{2} T_\beta \right) \sin \left(\frac{\omega_\beta - pk}{2} T_\beta - \varphi_\beta \right) \right] \right\},$$

где A_α , A_β , φ_α , φ_β находятся из (4)–(7). Коэффициенты разложения (3), определяющие амплитудный и фазовый спектры $\Phi(t)$, связаны с a_k и b_k известными формулами

$$c_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(b_k/a_k).$$

Эти формулы позволяют найти спектры колебаний заряда, тока, напряжения, спектр мощности и т. д. Например, спектр напряжений вычисляется заменой A_α на $U_\alpha = Q_0 A_\alpha / C_\alpha$ и A_β на $U_\beta = Q_0 A_\beta / C_\beta$. На рис. 3 а, б приведены экспериментальные спектры колебаний $U(t)$, показанных на рис. 2 а, б, т. е. в областях, принадлежащих 9-й и 10-й зонам возбуждения. В пределах погрешности эксперимента эти спектры совпадают с расчетными спектрами.

В заключение заметим, что триггерные свойства параметрических

* При глубине модуляции $m < 0,9$ номер зоны n можно определить как ближайшее к $(\theta_\alpha + \theta_\beta)/\pi$ целое число.

колебаний в контуре со скачкообразной модуляцией емкости могут быть использованы при статистической обработке радиосигналов, а спектральные свойства — для создания дискретно перестраиваемых генераторов ЧМ-ФМ сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Комолов В. П., Тищенко Д. А., Шашков П. Н. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1984, 25, № 1, с. 84. [2] Комолов В. П., Тищенко Д. А., Шашков П. Н. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1984, 25, № 1, с. 87. [3] Мак-Лахан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М.: ИЛ, 1953. [4] Goto E. J. IECSEJ, 1954. [5] Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Изв. вузов. Радиофизика, 1962, 4, с. 742.

Поступила в редакцию
27.10.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 3

УДК 535.375.848

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ТРЕХВОЛНОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДИФРАГИРУЮЩИХ ПУЧКОВ

В. И. Пустовой, В. А. Трофимов

(кафедра общей физики и волновых процессов)

До настоящего времени в задачах нелинейного взаимодействия световых волн учитывалась либо их дифракция [1], либо нестационарность [2]. Однако для целого ряда практически важных случаев представляет интерес рассмотрение взаимодействия световых импульсов, испытывающих дифракцию. При этом возникает проблема разработки эффективных численных методов расчета нелинейных эффектов много-частотного взаимодействия.

Уравнения, описывающие процесс генерации поляритонной волны, в безразмерных переменных имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial t} + iD_1 \Delta_{\perp} A_1 &= -ia_1 \sigma - i\chi_1 A_3 A_2^*, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial t} + iD_2 \Delta_{\perp} A_2 &= -i\chi_2 A_3 A_1^* - i\gamma_2 A_3 \sigma^*, \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} + iD_3 \Delta_{\perp} A_3 &= -i\chi_3 A_1 A_2 - i\gamma_3 A_2 \sigma, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \left(\frac{1}{T_2} + i\Omega \right) \sigma &= -i\alpha_2 A_1 - i\gamma_1 A_3 A_2^*, \end{aligned} \quad (1)$$

A_1 — амплитуда поляритонной волны. Отметим, что они отличаются от уравнений трехчастотного взаимодействия присутствием четвертого уравнения и вторых членов в правых частях. Частоты волн связаны соотношением

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2.$$

На входе в нелинейную среду заданы граничные условия

$$A_j(z=0, r, t) = f_j(r, t) A_{0j}, \quad j=1, 2, 3,$$

и начальное условие $\sigma(z, r, t=0) = 0$. Здесь A_j — нормированная на пиковое значение амплитуды третьей волны комплексная амплитуда j -й волны; σ — механическая часть поляритонной волны; v_j — обрат-