ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1984, т. 25, № 4

УДК 538.69

К ТЕОРИИ БЫСТРОГО АДИАБАТИЧЕСКОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС

Ю. С. Константинов

(кафедра радиофизики СВЧ)

Задача о прохождении через резонанс колебательной системы часто встречается в механике [1], радиофизике [2], в спектроскопии ЯМР [3, 4], квантовой электронике [5]. Математический анализ этой задачи приводит к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами, интегрирование которых, как правило, возможно лишь приближенными методами. В ЯМР и квантовой электронике большой интерес представляет случай так называемого «быстрого адиабатического прохождения» через резонанс, которое сопровождается инверсией населенностей уровней спиновых систем [3—5].

В настоящем сообщении исследовано прохождение через резонанс спиновой системы, описываемой уравнениями Блоха, при специальном задании внешних полей, что позволяет найти точное решение этих уравнений во вращающейся системе координат (ВСК) [6]. Рассмотрим в качестве исходных следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{m}_x = \Omega_z m_y - \nu m_x, \\ \dot{m}_y = -\Omega_z m_x + \Omega_x m_z - \nu m_y, \\ \dot{m}_z = -\Omega_x m_y - \nu (m_z - 1), \end{cases} \tag{1}$$

где $m_{x,y,z}=M_{x,y,z}/M_0$, $M_{x,y,z}$ — компоненты вектора намагниченности, M_0 — равновесная намагниченность, $\Omega_l=\gamma H_l/\omega_0$; H_x, H_z — зависящие от времени компоненты внешнего поля, $\nu=(\omega_0 T)^{-1}$, T — время релаксации, точка обозначает производную по безразмерному времени $\tau=\omega_0 t$.

Зададим Ω_z, Ω_x в одной из следующих форм:

$$\Omega_z = 1 - \Omega_A \cos\Omega_0\tau,\ \ \Omega_x = 2\Omega_A \sin\Omega_0\tau\cos\tau; \tag{2а}$$

$$\Omega_z = 1,\ \ \Omega_x = 2\,\Omega_A \sin\Omega_0\tau\cos\left(\tau + \frac{\Omega_A}{\Omega_0}\sin\Omega_0\tau\right), \tag{2б}$$

где $\Omega_0 \ll 1$. После перехода в ВСК по обычным формулам

$$m_x = u\cos\Phi_{а,б} - v\sin\Phi_{а,б}\,,\quad m_y = -u\sin\Phi_{а,б} - v\cos\Phi_{а,б}\,,\quad m_z = m_z$$

$$\left(\Phi_а = \tau,\ \Phi_б = \tau + \frac{\Omega_A}{\Omega_0}\sin\Omega_0\tau\right),$$

и отбрасывания быстро осциллирующих членов система (1) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{u} = \Omega_A v\cos\Omega_0\tau - \nu u, \\ \dot{v} = -\Omega_A u\cos\Omega_0\tau - \Omega_A m_z\sin\Omega_0\tau - \nu v, \\ \dot{m}_z = \Omega_A v\sin\Omega_0\tau - \nu(m_z - 1). \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, на систему спинов в ВСК действует поле с амплитудой Ω_A, вращающееся в плоскости u, m_z с постоянной угловой скоростью Ω_0. Преобразование переменных, совмещающее ось z_2 новой системы координат с вектором действующего поля,

$$u = u_1 \cos \Omega_0\tau - (v_1 \sin\alpha + m_{z_2} \cos\alpha) \sin \Omega_0\tau,$$
$$v = v_1 \cos\alpha - m_{z_2} \sin\alpha, \tag{4}$$
$$m_z = u_1 \sin \Omega_0\tau + (v_1 \sin\alpha + m_{z_2} \cos\alpha) \cos\Omega_0\tau,$$

где $\operatorname{tg}\alpha = \Omega_0/\Omega_A$, приводит (3) к линейной неоднородной системе уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \Omega_{эфф} v_1 - \nu u_1 + \nu \sin\Omega_0\tau, \\ \dot{v}_1 = -\Omega_{эфф} u_1 - \nu v_1 + \nu \sin\alpha \cos\Omega_0\tau, \\ \dot{m}_{z_2} = -\nu m_{z_2} + \nu \cos\alpha\cos\Omega_0\tau, \end{cases}$$

$\left(\Omega_{эфф} = \sqrt{\Omega_A^2 + \Omega_0^2}\right.$ — длина вектора действующего поля), общее решение которой находится без труда.

Это решение описывает затухающую с постоянной времени ν^{-1} нутацию намагниченности с частотой $\Omega_{эфф}$, которая наложена на более медленное периодическое движение с частотой Ω_0.

Возвращаясь в ВСК с помощью формул (4), получим

$$u = e^{-\nu\tau} [C_1 (\sin(\Omega_{эфф}\tau + \psi_1) \cos\Omega_0\tau - \sin\alpha \cos(\Omega_{эф}\tau + \psi_1) \sin\Omega_0\tau) -$$
$$- C_2 \cos\alpha \sin\Omega_0\tau] + \frac{1}{2} [(c - g\sin\alpha - \nu b \cos^2\alpha) + (c + g\sin\alpha +$$
$$+ \nu b \cos^2\alpha) \cos 2\Omega_0\tau + (d - f\sin\alpha - \nu a \cos^2\alpha) \sin 2\Omega_0\tau], \tag{5}$$
$$v = e^{-\nu\tau} [C_1 \cos\alpha \cos(\Omega_{эфф}\tau + \psi_1) - C_2 \sin\alpha] + \cos\alpha [(f - \nu a \sin\alpha) \cos\Omega_0\tau +$$
$$+ (g - \nu b \sin\alpha) \sin\Omega_0\tau],$$
$$m_z = e^{-\nu\tau} [C_1 (\sin\alpha \cos(\Omega_{эфф}\tau + \psi_1) \cos\Omega_0\tau + \sin(\Omega_{эфф}\tau + \psi_1) \sin\Omega_0\tau) +$$
$$+ C_2 \cos\alpha\cos\Omega_0\tau] + \frac{1}{2} [(d + f\sin\alpha + \nu a \cos^2\alpha) + (-d + f\sin\alpha +$$
$$+ \nu a \cos^2\alpha) \cos 2\Omega_0\tau + (c + g\sin\alpha + \nu b\cos^2\alpha) \sin 2\Omega_0\tau].$$

Здесь C_1, ψ_1, C_2 — произвольные постоянные; остальные коэффициенты, характеризующие установившееся движение, выражаются формулами

$$\nu a = (1 + \varkappa_0^2)^{-1}, \quad \nu b = \varkappa_0 (1 + \varkappa_0^2)^{-1},\ c = 2\varkappa_0\varkappa_A^2 D^{-1},\ d = (1 + \varkappa_{эфф}^2 + 3\varkappa_0^2) D^{-1},$$
$$f = \varkappa_0 (1 + 3\varkappa_{эфф}^2 + \varkappa_0^2)(\varkappa_{эфф} D)^{-1},$$
$$g = -\varkappa_A^2 (1 + \varkappa_{эфф}^2 + \varkappa_0^2)(\varkappa_{эфф} D)^{-1}, \quad D = (1 + \varkappa_A^2)^2 + 4\varkappa_0^2,\ \varkappa_n = \Omega_n/\nu.$$

Точное решение (5) позволяет исследовать форму сигналов ЯМР и зависимость продольной намагниченности m_z от времени при произвольных значениях Ω_A, Ω_0, ν как в установившемся, так и в переходном режимах при различных начальных условиях.

В качестве примера приложения полученных формул рассмотрим условия, при которых прохождение через резонанс сопровождается инверсией вектора намагниченности. Прежде всего заметим, что формулы (5) содержат следующие выражения:

$$-C_2 e^{-\nu\tau} \cos\alpha \sin\Omega_0\tau, \quad -C_2 e^{-\nu\tau} \sin\alpha, \quad C_2 e^{-\nu\tau} \cos\alpha \cos\Omega_0\tau,$$

определяющие парциальную намагниченность $\boldsymbol{m}_{\text{ад}}$, проекция которой на плоскость u, m_z вращается синфазно с полем, действующим в ВСК (см. (3)). Инверсия $m_{\text{ад}}$ происходит в моменты времени $\tau_n = n\pi/\Omega_0$, независимо от того, в каких количественных соотношениях находятся между собой $\varkappa_A$ и $\varkappa_0$. Инверсия полного вектора намагниченности зависит от соотношений этих параметров, поскольку они определяют величину остальных членов, входящих в выражение для m_z. Пусть в начальный момент $\tau=0$ $u(0)=v(0)=0$, $m_z(0)=1$. Тогда $C_1 \sin\psi_1 = -c$, $C_1 \cos\psi_1 = \sin\alpha - f$, $C_2 = (1-\nu a)\cos\alpha$.

В момент времени $\tau_1 = \pi/\Omega_0$ имеем:

$$m_z(\tau_1) = -e^{-\pi/\varkappa_0}[(\sin^2\alpha \cos\Omega_{\text{эфф}}\tau_1 + \cos^2\alpha) - f\sin\alpha\cos\Omega_{\text{эфф}}\tau_1 + c\sin\alpha\sin\Omega_{\text{эфф}}\tau_1 - \nu\alpha\cos^2\alpha] + f\sin\alpha + \nu a\cos^2\alpha. \quad (6)$$

Формулу (6) можно дополнительно упростить, положив $\Omega_{\text{эфф}}=2\Omega_0$ (т. е. $\Omega_A = \sqrt{3}\,\Omega_0$, $\alpha=\pi/6$). Теперь $m_z(\tau_1)$ будет зависеть только от $\varkappa_0$. Эта зависимость представлена ниже.

$\varkappa_0$	1	2	3	10	20	30	40	50	60	80
$m_z(\tau_1)$	0,65	0,25	−0,20	−0,67	−0,83	−0,89	−0,92	−0,94	−0,95	−0,96

С ростом $\varkappa_0$ $m_z(\tau_1)$ изменяет знак при $\varkappa_0 \simeq 3$ и затем стремится к $m_z(\tau_1) = -1$ (полная инверсия). Таким образом, при $\Omega_{\text{эфф}} = 2\Omega_0$ для создания инверсии, близкой к полной, достаточно выполнить условие «быстрого прохождения» через резонанс: $\varkappa_0 \gg \pi$. Инверсия может быть достигнута и при выполнении обычного условия адиабатичности [3]: $\varkappa_A \gg \varkappa_0$, $(\alpha \simeq 0)$, но для этого требуются более сильные поля Ω_A, чем в случае $\Omega_{\text{эфф}} = 2\Omega_0$.

Автор признателен Ю. Е. Дьякову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964, с. 76. [2] Харкевич А. А. Спектры и анализ. М.: ГИТТЛ, 1957, с. 129. [3] Bloch F. Phys. Rev., 1946, 70, p. 460. [4] Гвоздовер С. Д., Магазаник А. А. ЖЭТФ, 1950, 20, с. 705. [5] Стейнфелд Дж. и др. В кн.: Лазерная и когерентная спектроскопия. М.: Мир, 1982, с. 235. [6] Бутылкин В. С. и др. В кн.: Резонансные взаимодействия света с веществом. М.: Наука, 1977, с. 81.

Поступила в редакцию
17.10.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 4

УДК 530.12

О КОНВЕРСИИ ПЛОСКОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

В. И. Денисов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Изучение взаимодействия гравитационных волн с электрическими и магнитными полями постоянно находится в центре внимания различных исследователей [1—4], так как эти процессы в принципе дают