УДК 534.22

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТЯХ

Н. И. Пушкина

(кафедра научной информации МГУ)

Нелинейные взаимодействия капиллярно-гравитационных волн на поверхности жидкости достаточно хорошо исследованы теоретически и экспериментально [1—7]. В последнее время появился еще целый ряд работ, в которых продолжают рассматриваться различные свойства нелинейных поверхностных волн [8—12]. Интерес к нелинейным поверхностным явлениям связан, в частности, с тем, что взаимодействия капиллярно-гравитационных волн в океане обусловливают рассеяние энергии с поверхности океана и позволяют поэтому объяснить некоторые закономерности динамики морского волнения.

Поверхностные волновые явления исследовались не только в обычных, но и в квантовых жидкостях. В работе [13] дана общая теория поверхностных свойств сверхтекучих жидкостей, а в [14] рассмотрены нелинейные взаимодействия поверхностных волн в квантовой жидкости.

В одной из первых теоретических работ [3], посвященных нелинейным капиллярно-гравитационным волнам в обычных жидкостях, рассматривалось резонансное взаимодействие трех волн. В данной работе результаты [3] будут дополнены в двух отношениях. Во-первых, более корректно будут выписаны исходные нелинейные уравнения. Во-вторых, будут выяснены некоторые черты пространственной картины нелинейного взаимодействия и получено выражение для порога параметрического распада возбуждающей капиллярной волны.

Запишем исходные нелинейные уравнения движения и граничные условия. Обозначим z-координату точек поверхности буквой ξ. Тогда с точностью до членов второго порядка малости давление p в среде вблизи поверхности равно (см., например, [15])

$$p = \frac{\tau}{\rho}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

где ρ — плотность, τ — коэффициент поверхностного натяжения. Подстановка выражения (1) в уравнение Эйлера дает следующее уравнение для потенциала скорости α:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\tau}{\rho}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{2}$$

Рассматриваем случай чисто капиллярных волн без гравитационной добавки, что оправданно для достаточно малых длин волн.

Дополнив уравнение (2) кинематическим граничным условием

$$d\xi/dt = \partial\alpha/\partial z, \tag{3}$$

получаем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial t} + \dfrac{\tau}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right) = -\dfrac{1}{2}(\nabla\alpha)^2 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2 - \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial z\partial t}\,\xi, \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial t} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial z} = \xi\,\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} - \nabla\alpha\cdot\nabla\xi. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$.

Заметим, кстати, что нет необходимости комбинировать уравнения (1) и (3) и получать более громоздкую систему уравнений, как это сделано в [3].

Пусть жидкость занимает часть пространства $x>0$, $z>0$. Предполагаем, что в ней вдоль оси x распространяется интенсивная капиллярная волна, которая возбуждает параметрически за счет нелинейности среды две другие капиллярные волны, распространяющиеся под углом друг к другу. Решение системы (4) ищем, таким образом, в виде суммы трех волн, распространяющихся в плоскости xy.

Полагаем

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\left[\sum_j a_j(\mathbf{r}) \exp\left[i(\mathbf{k}_j\mathbf{r} - \omega_j t)\right] + \text{к. с.}\right], \tag{5}$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$, а $a_j(\mathbf{r})$ — медленно меняющиеся с расстоянием амплитуды; $j = 1, 2, 3$; $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$.

Решение для потенциала скорости ищем в виде

$$\alpha(\mathbf{r}, z, t) = \frac{1}{2}\left\{\sum_j \alpha_j(\mathbf{r}) \exp\left[i(\mathbf{k}_j\mathbf{r} - \omega_j t) - k_j z\right] + \text{к. с.}\right\}.$$

При этом полагаем

$$\alpha_j = i\frac{\omega_j}{k_j} a_j + \delta_j, \tag{6}$$

где первое слагаемое дает соотношение между α и ξ, справедливое в линейном случае, а δ_j — нелинейная добавка; $\exp(-k_j z)$ дает затухание капиллярной волны вдоль оси z. В [3] δ_j ошибочно полагалась равной нулю. В результате уравнения (А1), (А2) из [3] неверны, и только подходящая комбинация исходных нелинейных уравнений дала возможность эту ошибку скомпенсировать.

Найдем нелинейную добавку δ_j. Для этого воспользуемся вторым уравнением системы (4). Подставляя в него выражения (5) и (6), получаем:

$$\begin{aligned} \delta_{1,2} &= \frac{1}{2} a_3 a^*_{2,1} \frac{i}{k_{1,2}} b_{23,13}; \\ \delta_3 &= \frac{1}{2} a_1 a_2 \frac{i}{k_3} b_{12}, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$b_{2,13} = \mathbf{k}_{2,1}\mathbf{k}_3\left(\frac{\omega_{2,1}}{k_{2,1}} - \frac{\omega_3}{k_3}\right) - \omega_{2,1} k_{2,1} + \omega_3 k_3;$$

$$b_{12} = \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\left(\frac{\omega_1}{k_1} + \frac{\omega_2}{k_2}\right) + \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2.$$

Далее, подставляя выражения (5), (6) с использованием (7) в первое граничное условие системы (4), получим следующие уравнения для медленно меняющихся с расстоянием амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dx} &= \frac{\rho}{4ik_{1x}\tau} a_3 a_2^* \left[-\frac{\omega_1}{k_1} b_{23} + c_{321}\right], \\ \frac{da_2}{dx} &= \frac{\sigma}{4ik_{2x}\tau} a_3 a_1^* \left[-\frac{\omega_2}{k_2} b_{13} + c_{132}\right], \\ \frac{da_3}{dx} & \frac{\rho}{4ik_3\tau} a_1 a_2 \left[-\frac{\omega_3}{k_3} b_{12} + c_{123}\right], \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$c_{ijk}=\omega_i^2+\omega_j^2+e_{ijk}\omega_i\omega_j\left(1-e_{ijk}\mathbf{k}_i\mathbf{k}_j/(\mathbf{k}_i\mathbf{k}_j)\right),$$

$ijk=1,2,3$; e_{ijk} — единичный совершенно антисимметричный тензор; суммирования по одинаковым индексам нет.

Известно, что система уравнений (8) решается в эллиптических функциях (см., например, [16]).

Остановимся подробнее на следующем. В рассматриваемом приближении движение потенциально, и потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\alpha=0$. Определим, что отсюда следует в нелинейном случае.

$$\Delta\alpha=\sum_j i\,\frac{\omega_j}{k_j}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x}ik_{jx}-\frac{\partial a_j}{\partial z}k_j\right)\exp\left[i\left(\mathbf{k}_j\mathbf{r}-\omega_jt\right)-k_jz\right]+\text{к. с.}=0.$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial a_j}{\partial x}ik_{jx}=\frac{\partial a_j}{\partial z}k_j. \tag{9}$$

Соотношение (9) — это нелинейная добавка к соотношению между

$$v_x=\partial\alpha/dx \quad \text{и} \quad v_z=\partial\alpha/\partial z;$$

$$v_{jx}=\frac{1}{2}\left\{\left(ik_{jx}\alpha_j+i\frac{\omega_j}{k_j}\frac{\partial a_j}{\partial x}\right)\exp\left[i(\mathbf{k}_j\mathbf{r}-\omega_jt)-k_jz\right)+\text{к. с.}\right\}; \tag{10}$$

$$v_{jz}=\frac{1}{2}\left\{\left(-k_j\alpha_j+i\frac{\omega_j}{k_j}\frac{\partial a_j}{\partial z}\right)\exp\left[i(\mathbf{k}_j\mathbf{r}-\omega_jt)-k_jz\right]+\text{к. с.}\right\}.$$

Представим (10) в виде

$$\begin{aligned} v_{jx}&=v_{jx}^{(0)}+v_{jx}^{(1)}+\text{к. с.},\\ v_{jz}&=v_{jz}^{(0)}+v_{jz}^{(1)}+\text{к. с.} \end{aligned} \tag{11}$$

Из (10) и (11) видно, что

$$v_{jz}^{(0)}=iv_{jx}^{(0)}/\cos\left(\mathbf{k}_j\widehat{\ }\mathbf{k}_3\right), \tag{12}$$

$$v_{jz}^{(1)}=iv_{jx}^{(1)}\cos\left(\mathbf{k}_j\widehat{\ }\mathbf{k}_3\right). \tag{13}$$

Соотношение между $v^{(0)}{}_{jz}$ и $v^{(0)}{}_{jx}$ такое же, как и в линейном случае; (13) дает соотношение между нелинейными добавками к v_{jz} и v_{jx} вследствие медленного изменения с расстоянием амплитуд взаимодействующих волн.

Найдем порог параметрического распада возбуждающей звуковой волны (a_3) на две другие волны (a_1 и a_2). Заметим здесь, что так как законы сохранения энергии и импульса разрешают взаимодействие трех волн под разными углами в достаточно большом диапазоне, то для того, чтобы наблюдать взаимодействие только трех рассматриваемых волн, следует создать в эксперименте для одной из волн (a_1 или a_2) резонансные условия. В таком случае будем исходить из временных уравнений, т. е. будем считать, что амплитуды взаимодействующих волн медленно меняются во времени. Нелинейные уравнения для медленно меняющихся во времени амплитуд имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt}+\beta_1a_1&=\frac{k_1}{4i\omega_1}a_3a_2^*B_{23},\\ \frac{da_2}{dt}+\beta_2a_2&=\frac{k_2}{4i\omega_2}a_3a_1^*B_{13}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{da_3}{dt}+\beta_3 a_3=\frac{k_3}{4i\omega_3}a_1 a_2 B_{12}.$$

Здесь B_{23}, B_{13}, B_{12} — соответствующие выражения в фигурных скобках системы (8), β_j — временные коэффициенты затухания волн.

Решая систему (14) в приближении заданного поля ($|a_3|=\mathrm{const}$), находим выражение для пороговой амплитуды a_3:

$$|a_3|^2_{\text{пор}}=\frac{16\beta_1\beta_2\omega_1\omega_2}{B_{13}B_{23}k_1k_2}.$$

Определим, какова частотная зависимость и величина пороговой амплитуды. Для капиллярных волн в воде при комнатной температуре $\beta\simeq 3\cdot 10^{-3}\omega^2/(2\pi k)\,\text{с}^{-1}$ [17], $\tau/\rho\approx 74$ дн/см. Далее, из (8) видно, что $B_{13}\sim B_{23}\sim\omega^2$. Тогда

$$|a_3|^2_{\text{пор}}\approx 10^{-3}\omega^{-2/3}\ \text{см}^2.$$

Для частоты $\omega\approx 2\pi\cdot 40\ \text{с}^{-1}$ пороговая амплитуда $a_{\text{пор}}\simeq 10^{-2}$ см.

Таким образом, пороговая величина амплитуды параметрического распада капиллярной волны на две другие волны — экспериментально достижимая величина.

Автор благодарит Л. К. Зарембо за консультацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Phillips O. M. J. Fluid Mech., 1960, 9, p. 193. [2] Longuet-Higgins M. S. J. Fluid Mech., 1961, 12, p. 321. [3] McGoldrick L. F. J. Fluid Mech., 1965, 21, p. 305. [4] Зарембо Л. К., Красильников В. А., Тхай Тхань Лонг. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1969, № 5, с. 132. [5] Зарембо Л. К., Красильников В. А., Тхай Тхань Лонг. Там же, № 6, с. 121. [6] Зарембо Л. К., Красильников В. А., Тхай Тхань Лонг. ДАН СССР, 1970, 192, № 3, с. 548. [7] Воронин В. П., Зарембо Л. К. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1970, № 6, с. 717. [8] Banerjee P. P., Korpel A. Phys. Fluids, 1982, 25, p. 1938. [9] Yan-Chow Ma. Phys. Fluids, 1982, 25, p. 945. [10] Yan-Chow Ma. Phys. Fluids, 1983, 26, p. 30. [11] Meadows G. A., Shuchman R. A., Lyden J. D. J. Geophys. Res. — O(C), 1982, 87, p. 5731. [12] Davies A. G. J. Marine Res., 1982, 40, p. 331. [13] Андреев А. Ф., Компанеец Д. А. ЖЭТФ, 1971, 61, с. 2459. [14] Пушкина Н. И. ЖЭТФ, 1984, 86, с. 133. [15] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1953, с. 291. [16] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1978, гл. IX, с. 544. [17] Воронин В. П. Канд. дис. М. (МГУ), 1972. с. 79.

Поступила в редакцию
14.11.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 4

УДК 539.172.3 : 519.25

РЕДУКЦИОННАЯ ОБРАБОТКА И ОЦЕНКА СЕЧЕНИЙ ФОТОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

В. В. Варламов, Б. С. Ишханов, Ю. П. Пытьев, А. П. Черняев, Д. В. Юдин

(НИИЯФ; кафедра математики)

1. Введение. Известно, что сечения фотоядерных реакций, полученные на фотонных пучках тормозного (ТИ) и квазимонохроматического (КМИ) γ-излучения (последнее возникает при аннигиляции на лету ускоренных позитронов), согласуясь в целом по форме, положению и величине, обнаруживают тем не менее систематические расхождения