$$\frac{da_3}{dt} + \beta_3 a_3 = \frac{k_3}{4i\omega_3} a_1 a_2 B_{12}.$$

Здесь $B_{23}$, $B_{13}$, $B_{12}$ — соответствующие выражения в фигурных скобках системы (8), $\beta_j$ — временные коэффициенты затухания волн.

Решая систему (14) в приближении заданного поля ($|a_3|=\mathrm{const}$), находим выражение для пороговой амплитуды $a_3$:

$$|a_3|^2_{\text{пор}} = \frac{16\beta_1\beta_2\omega_1\omega_2}{B_{13}B_{23}k_1k_2}.$$

Определим, какова частотная зависимость и величина пороговой амплитуды. Для капиллярных волн в воде при комнатной температуре $\beta \simeq 3\cdot 10^{-3}\omega^2/(2\pi k)\,\text{с}^{-1}$ [17], $\tau/\rho \approx 74$ дн/см. Далее, из (8) видно, что $B_{13} \sim B_{23} \sim \omega^2$. Тогда

$$|a_3|^2_{\text{пор}} \approx 10^{-3}\omega^{-2/3}\ \text{см}^2.$$

Для частоты $\omega \approx 2\pi\cdot 40\ \text{с}^{-1}$ пороговая амплитуда $a_{\text{пор}} \simeq 10^{-2}$ см.

Таким образом, пороговая величина амплитуды параметрического распада капиллярной волны на две другие волны — экспериментально достижимая величина.

Автор благодарит Л. К. Зарембо за консультацию.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Phillips O. M. J. Fluid Mech., 1960, **9**, p. 193. [2] Longuet-Higgins M. S. J. Fluid Mech., 1961, **12**, p. 321. [3] McGoldrick L. F. J. Fluid Mech., 1965, **21**, p. 305. [4] Зарембо Л. К., Красильников В. А., Тхай Тхань Лонг. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1969, № 5, с. 132. [5] Зарембо Л. К., Красильников В. А., Тхай Тхань Лонг. Там же, № 6, с. 121. [6] Зарембо Л. К., Красильников В. А., Тхай Тхань Лонг. ДАН СССР, 1970, **192**, № 3, с. 548. [7] Воронин В. П., Зарембо Л. К. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1970, № 6, с. 717. [8] Banerjee P. P., Korpel A. Phys. Fluids, 1982, **25**, p. 1938. [9] Yan-Chow Ma. Phys. Fluids, 1982, **25**, p. 945. [10] Yan-Chow Ma. Phys. Fluids, 1983, **26**, p. 30. [11] Meadows G. A., Shuchman R. A., Lyden J. D. J. Geophys. Res. — O(C), 1982, **87**, p. 5731. [12] Davies A. G. J. Marine Res., 1982, **40**, p. 331. [13] Андреев А. Ф., Компанеец Д. А. ЖЭТФ, 1971, **61**, с. 2459. [14] Пушкина Н. И. ЖЭТФ, 1984, **86**, с. 133. [15] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1953, с. 291. [16] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1978, гл. IX, с. 544. [17] Воронин В. П. Канд. дис. М. (МГУ), 1972. с. 79.

Поступила в редакцию
14.11.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 4

УДК 539.172.3 : 519.25

# РЕДУКЦИОННАЯ ОБРАБОТКА И ОЦЕНКА СЕЧЕНИЙ ФОТОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

**В. В. Варламов, Б. С. Ишханов, Ю. П. Пытьев, А. П. Черняев, Д. В. Юдин**

*(НИИЯФ; кафедра математики)*

**1. Введение.** Известно, что сечения фотоядерных реакций, полученные на фотонных пучках тормозного (ТИ) и квазимонохроматического (КМИ) $\gamma$-излучения (последнее возникает при аннигиляции на лету ускоренных позитронов), согласуясь в целом по форме, положению и величине, обнаруживают тем не менее систематические расхождения

[1]. Главные из них заключаются в том, что КМИ-сечения имеют меньшие на 10—20% абсолютные значения и существенно более слабые структурные особенности по сравнению с ТИ-сечениями. В работе [2] показано, что эти систематические расхождения обусловлены отличием формы реального КМИ-спектра фотонов от δ-функции: наличием довольно значительной ($\Delta=0{,}3$—$0{,}5$ МэВ) полуширины линии и тормозной подложки с амплитудой $D$ в несколько (до 10!) процентов от амплитуды линии в спектре. Подложка, являясь основной причиной неточностей в определении абсолютных величин сечений, дополнительно сглаживает их структурные особенности.

Было показано, что форма реального КМИ-спектра затрудняет интерпретацию результата традиционного КМИ-эксперимента как собственно сечения, так как на самом деле доступной оказывается лишь информация о выходе, связанном с сечением реакции интегральным уравнением

$$Y(E_\gamma^{\max}) = \alpha \int W(E_\gamma, E_\gamma^{\max})\, \sigma(E_\gamma)\, dE_\gamma, \tag{1}$$

где в отличие от ТИ-экспериментов $W(E_\gamma, E_\gamma^{\max})$ есть не спектр Шиффа, а КМИ-спектр, $\sigma(E_\gamma)$ — сечение реакции.

Таким образом, задача определения КМИ-сечения оказывается аналогичной задаче нахождения ТИ-сечения и требует для восстановления сечения $\sigma$ из выхода $Y$ при данном $W$ использования одного из известных методов решения уравнения (1). В работе [2] использовался метод регуляризации Тихонова, и было показано, что восстановленное таким образом КМИ-сечение оказывается по своим характеристикам существенно более близким к соответствующему ТИ-сечению.

В данной работе для решения задачи восстановления сечения использовался метод редукции, позволяющий проанализировать и наглядно проиллюстрировать взаимосвязь параметров «разрешение — шум» в математической модели и оценить ее качество.

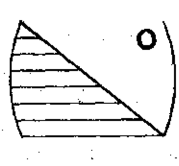
2. **Математическое моделирование фотоядерного эксперимента.** В реальном физическом эксперименте вместо уравнения (1) имеем

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(1,1) & \ldots & W(1,N) \\ \vdots & & \vdots \\ W(N,1) & \ldots & W,(N,N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_N \end{pmatrix}, \tag{2}$$

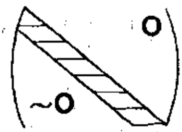
где $N$ — число измерений при различных верхних границах γ-спектра, $\nu_i$ $(i=1, \ldots, N)$ — ошибки измерений, заданные корреляционным оператором

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Delta\sigma_1^2 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \Delta\sigma_N^2 \end{pmatrix}.$$

В случае ТИ матрица $W$ — треугольная, т. е.

$W_{\text{ТИ}} =$ 

в случае КМИ

$W_{\text{КМИ}} =$ 


Естественно, что как $W_{\text{Т}}$, так и $W_{\text{КМ}}$ не совпадают с единичной матрицей, вследствие чего значения $Y_i$ в таких экспериментах не совпадают со значениями сечения. Задача обработки, таким образом, сводится к преобразованию вектора $Y$ к виду, который он имел бы при наличии $\gamma$-спектра, максимально приближенного к монохроматическому, при определенном уровне ошибок.

3. **Задача редукции к идеальному прибору.** В линейной конечномерной модели $[A, \Sigma]$ измерения сигнала $f$ можно представить в виде

$$\xi = Af + \nu,$$

где вектор $\xi$ — результат измерения на приборе $A$, линейный оператор $A$ и шум $\nu$ с заданным корреляционным оператором $\Sigma$ характеризуют способ регистрации $f$ [3].

Запишем линейное преобразование равенства (3):

$$R\xi = If + (RA - I)f + R\nu.$$

Если $RA = I$, то $R\xi$ интерпретируется как искаженный шумом $R\nu$ выходной сигнал идеального прибора $I$, заданного единичной матрицей. Однако находить $R$ из условия $RA = I$ нецелесообразно, так как соответствующий уровень шума в реальных задачах велик. Небольшое увеличение невязки $(RA - I)f$ позволяет существенно снизить шум $R\nu$.

Поскольку для каждого $R$ эффект ошибки $R\nu$ известен и определяется энергией шума $E|R\nu|^2$, а ошибка $(RA - I)f$ проявляется как ложный сигнал, неизвестный, как и сигнал $f$, то возможна следующая постановка задачи:

$$\inf\{\|RA - I\|_2 \mid E\|R\nu\| \leqslant \varepsilon\} = \|R_\varepsilon A - I\|^2{}_2, \tag{4}$$

где $\|RA - I\|_2 = [\mathrm{Tr}(RA - I)(RA - I)^*]^{1/2}$. Если $R_\varepsilon$ — решение (4), то вектор $R_\varepsilon\xi$ можно рассматривать как искаженный шумом $R_\varepsilon\nu$ выходной сигнал прибора $R_\varepsilon A$ ближайшего к $I$, при заданном ограничении на уровень шума $E\|R_\varepsilon\nu\|^2 \leqslant \varepsilon$. Решение задачи (4) имеет вид

$$R_\varepsilon = \begin{cases} R(\omega) = A^*(AA^* + \omega\Sigma)^{-1}, \ \omega = \omega_\varepsilon, \ 0 < \varepsilon < h(0), \\ 0, \ \varepsilon = 0, \\ (A^*A)^{-1}A^*, \ \varepsilon \geqslant h(0), \end{cases}$$

где $h(0) = \mathrm{Tr}(A^*\Sigma^{-1}A)^{-1}$, в случае невырожденности операторов $\Sigma$ и $A^*A$ $\omega_\varepsilon$ — единственный корень уравнения

$$h(\omega) = \|R(\omega)\nu\|^2 = \|R(\omega)\Sigma^{1/2}\|_2^2 = \|A^*(AA^* + \omega\Sigma)^{-1}\Sigma^{1/2}\|_2^2 = \varepsilon.$$

При этом имеет место закон сохранения

$$\omega\frac{dh(\omega)}{d\omega} + \frac{dg(\omega)}{d\omega} = 0, \ \omega \geqslant 0,$$

где $g(\omega) = \|RA - I\|^2{}_2$ — невязка, т. е. отличие $RA$ от $I$.

Связь между невязкой $g(\omega) = g$ и уровнем шума $h(\omega) = h$ при $\omega \geqslant 0$ или $g = g(h)$ называется оперативной характеристикой задачи (4). Оперативная характеристика сопоставляет (рис. 1) разрешение комплекса «ЭВМ+прибор» и уровень шума $R\nu$ (своеобразный закон сохранения типа «разрешение — шум»). Для данного $\varepsilon$ выбирается оптимальный параметр $\omega$ (оператор $R_\varepsilon$), так что $R_\varepsilon A$ — ближайший к $I$, а уровень шума ограничен неравенством $E\|R_\varepsilon \nu\|^2 \leqslant \varepsilon$. Оперативная характеристика для каждого $R$ определяет ошибку редукции и, естественно, отражает качество редукции для конкретной экспериментальной модели $[A, \Sigma]$, т. е. качество модели $[A, \Sigma]$.

Рассмотрим схему измерения сигнала, полученного на приборе $A' : \xi' = A'f + \nu'$, $[A', \Sigma']$. Редукция к идеальному прибору для модели $[A', \Sigma']$ дает ее оперативную характеристику. Будем говорить, что качество модели $[A', \Sigma']$ выше, чем качество $[A, \Sigma]$, если оперативная характеристика первой «лежит» ниже оперативной характеристики второй (см. рис. 1). Лучшей модели, таким образом, соответствует меньшая ошибка редукции (для любого ограничения $\varepsilon$ на уровень шума $[A', \Sigma']$ позволяет лучше приблизиться к идеальному прибору). При пересечении оперативных характеристик сравниваемых моделей однозначно ответить на вопрос, качество какой модели выше, можно только отдельно для областей $h < \varepsilon'$ и $h > \varepsilon'$, где $\varepsilon'$ — значение $h$ в точке пересечения. Следует отметить, что оперативная характеристика объединенной модели, описывающей два эксперимента:

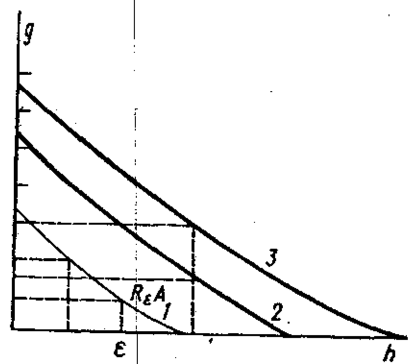



Рис. 1. Общий вид оперативной характеристики $g = g(h)$ задачи (4) — 1, модели $[A', \Sigma']$ — 2 и модели $[A, \Sigma]$ — 3. Качество модели $[A', \Sigma']$ выше качества модели $[A, \Sigma]$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} \nu \\ \nu' \end{pmatrix}, \quad [\tilde{A}, \tilde{\Sigma}], \tag{5}$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$, $\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma' \end{pmatrix}$, будет проходить ниже характеристик исходных, а значит, модель $[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$ будет лучшего качества. Схема (5) может включать произвольное количество измерений (желательно различных по своей физической природе), учет которых дополнительно снижает ошибку редукции и повышает надежность ее результатов.

4. **Редукция выходов.** С целью иллюстрации возможностей метода редукции, а также для сравнения качества экспериментов различного типа были выполнены модельные расчеты. Модельное сечение, содержащее ряд максимумов, подставлялось в уравнение (2), с помощью которого для спектров $\gamma$-излучения двух типов (ТИ и КМИ с различными полуширинами $\Delta$) рассчитывались выходы реакции. Модельные ошибки соответствовали реальным ошибкам экспериментов. Результаты редукции полученных таким образом выходов и соответствующие оперативные характеристики представлены на рис. 2. Видно, что уменьшение ошибок редукции сопровождается ростом невязки, а следовательно, и ухудшением разрешения. Качество КМИ-моделей оказывается тем выше, чем меньше полуширина линий в КМИ-спектре, однако при реальных ошибках в экспериментальных КМИ-выходах (5—10%) их оперативные характеристики оказываются существенно выше ТИ-характеристики (ошибки выхода $\sim 0{,}1\%$).

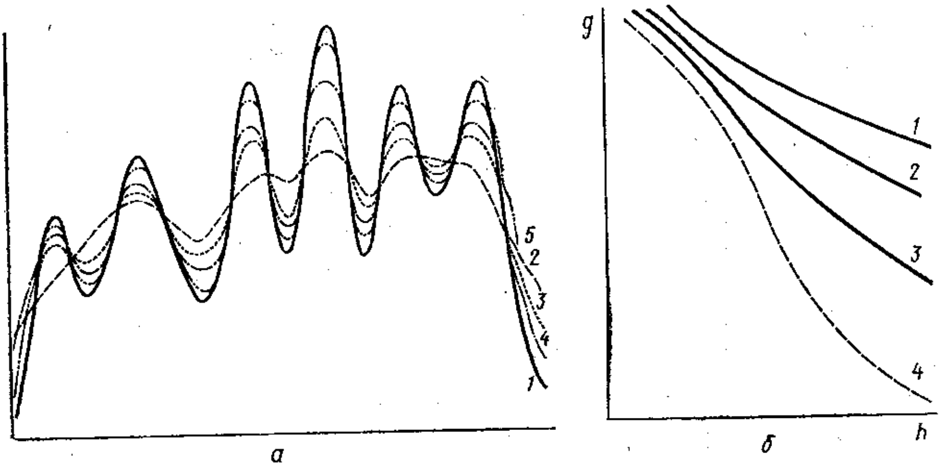



Рис. 2. Варианты восстановления модельного сечения: *1* — исходное сечение; *2*, *3*, *4* — сечения, восстановленные из КМИ-выхода ($\Delta=0{,}5$ МэВ) с ошибками в сечении соответственно 2, 5 и 10%; *5* — сечение, восстановленное из ТИ-выхода с ошибками в сечении 10% — *а*. Оперативные характеристики моделей: КМИ ($\Delta=0{,}5$(*1*); 0,3 (*2*) и 0,2 (*3*)) и Ти (*4*) — *б*

В рамках данного подхода выполнена редукционная обработка ряда реальных выходов фотонейтронных реакций. Выбирались реакции, которые были изучены в ТИ- и КМИ-экспериментах, выполненных на приблизительно одинаковом и достаточно высоком качественном уровне:

5. **Фотонейтронное сечение для $^{12}$C.** КМИ-выход реакции $^{12}C(\gamma, n)$ [4] (рис. 3, *г* — точки с ошибками) измерен на пучке КМИ-фотонов, спектр которых включал линию с полушириной $\Delta=0{,}2$—$0{,}3$ МэВ и тормозную подложку с амплитудой $D\approx5\%$. В работе [5] КМИ-выход той же реакции был измерен при аналогичных параметрах $\Delta=0{,}1$—$0{,}2$ МэВ, $D\approx5\%$. Однако эффективная полуширина $\Delta$ оказывалась большей, так как $\gamma$-спектр сильно отличается от $\delta$-функции, что не учитывалось авторами [4, 5]. Именно с такими КМИ-спектрами была проведена редукция выходов КМИ-экспериментов согласно схеме, описанной в разделе 3. Ограничение на параметр шума при проведении редукции выбиралось $\sim5\%$ — порядка величины экспериментальных ошибок в КМИ-выходах. Использовалась цифровая информация из международной машинной библиотеки сечений, соответствующих обзору [1], из фондов Центра данных фотоядерных экспериментов НИИЯФ МГУ. На рис. 3, *г* (сплошная линия) приведено редуцированное сечение. Следует отметить ряд его характерных свойств:

— отчетливо проявились в виде надежно разрешившихся максимумов структурные особенности, не выходившие за пределы ошибок в исходных данных;

— не проявилось новых (ложных) максимумов;

— абсолютное значение сечения оказалось на 10% больше значения выхода.

Изменения при переходе от исходного КМИ-выхода к редуцированному сечению происходят в направлении, сближающем это последнее с соответствующим ТИ-сечением [6], приведенным на рис. 3, *а*. Сравнение данных на рис. 3, *а* и *г* выявляет полное согласие по положению максимумов в ТИ- и КМИ-сечениях. В разделе 3 было сказано о преимуществах редукций в рамках объединенной модели. В рам-

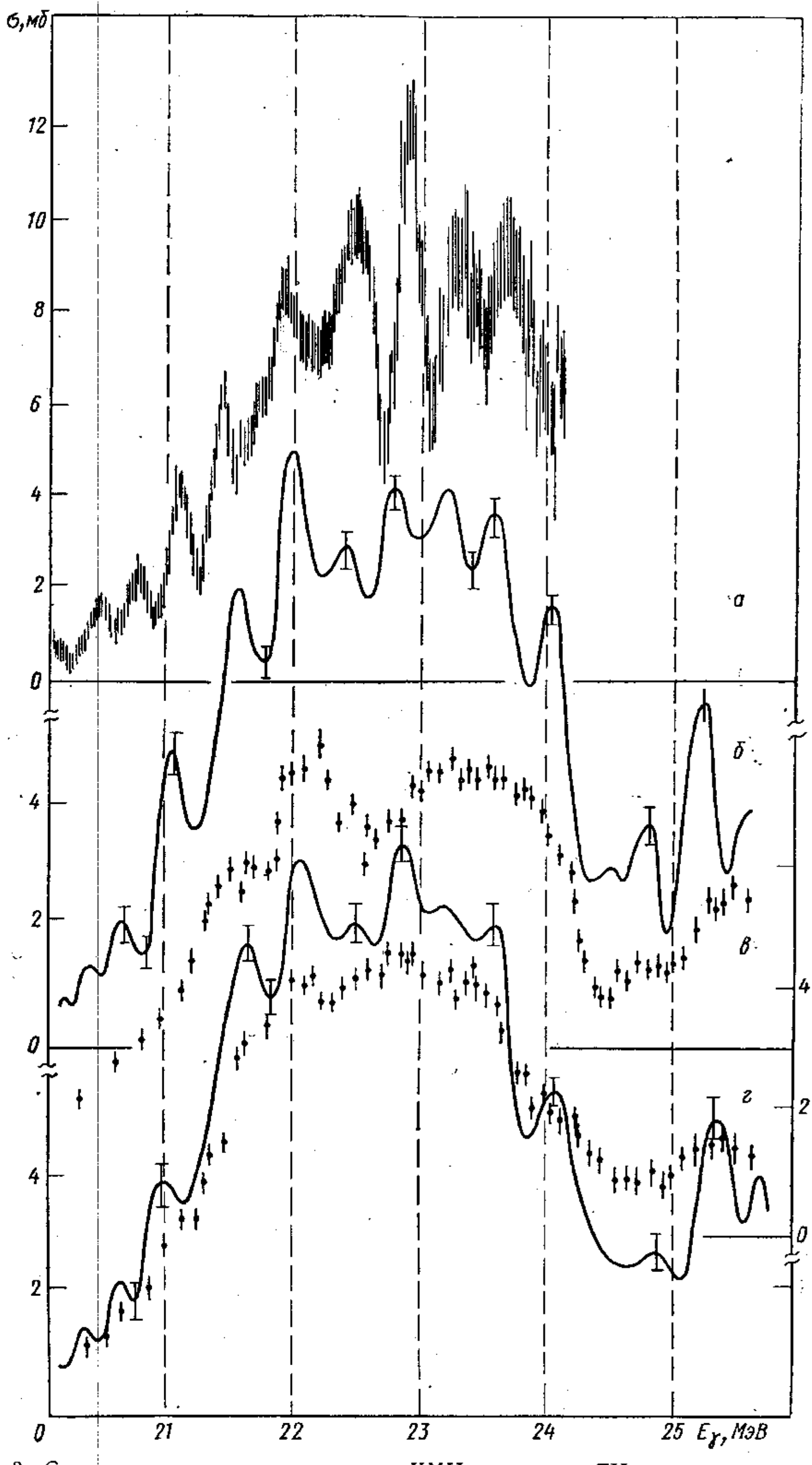



Рис. 3. Сравнение результатов редукции КМИ-выходов с ТИ-сечением для реакции $^{12}C$ (γ, *n*): сечение из [6] (*а*); редукция КМИ-выходов из [4, 5] в объединенной модели (*б*); КМИ-выход из [5] (*в*); результат редукции (сплошная линия) КМИ-выхода (точки с ошибками) [4] (*г*)

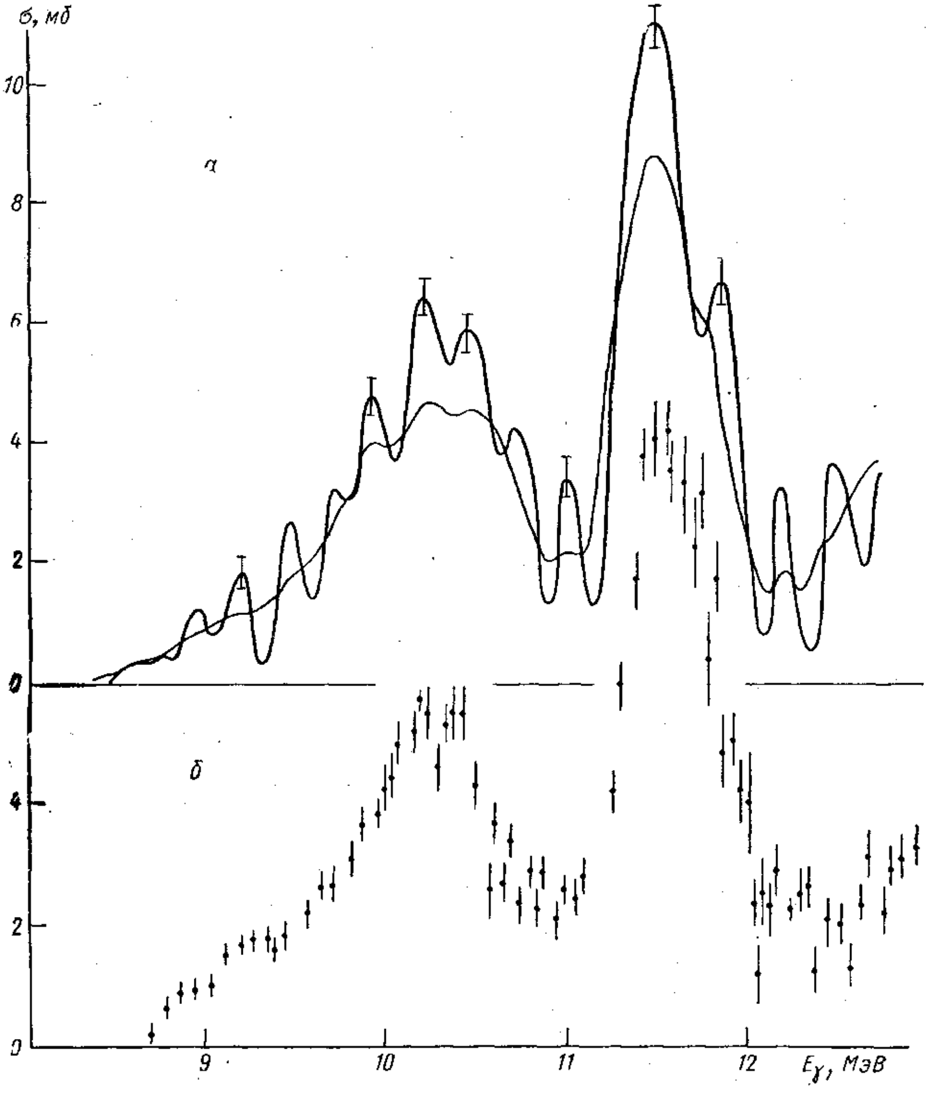



Рис. 4. Редукция сечения реакции $^{18}O$ $((\gamma, n)+2(\gamma, 2n))$: *а* — тонкая линия — КМИ-выход [7], толстая линия — восстановленное сечение; *б* — ТИ-сечение [7]

ках модели, включавшей в схему редукции два КМИ-выхода (точки *в* и *г*), было получено сечение, приведенное на рис. 3, *б*. Сравнение этого сечения с ТИ-сечением (см. рис. 3, *а*) выявляет уже хорошее согласие как по положению отдельных максимумов, так и по их величине и форме.

6. **Сечение реакции** $^{18}O$ $[(\gamma, n)+2(\gamma, 2n)]$. Большой интерес представляют результаты сравнения сечений реакции $^{18}O[(\gamma, n)+2(\gamma, 2n)]$ [7]. Авторы используют КМИ-выход, измеренный при полуширине линии $\Delta=0{,}2$ МэВ (рис. 4, *а*), и сравнивают его с ТИ-сечением (рис. 4, *б*). Детальное сравнение этих данных (таблица) свидетельствует о том, что по энергетическому положению максимумов наблюдается соответствие, а по амплитудам и ширинам — различие на 10—20% (структура вновь оказывается сглаженной).

| Данные работы [6] | | | Наши данные | Данные работы [6] | | Наши данные |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$, МэВ | $\sigma_{ТИ}$, мб | $\sigma_{КМИ}$, мб | $\sigma_{ТИ}/\sigma_{КМИ}$ | $\Gamma_{ТИ}$, мб | $\Gamma_{КМИ}$, мб | $\Gamma_{ТИ}/\Gamma_{КМИ}$ |
| 9,1 | 1,4 | 1,1 | 1,27 | 0,4 | 0,6 | 1,5 |
| 10,3 | 6,5 | 5,3 | 1,23 | 0,4 | 0,9 | 2,25 |
| 11,5 | 11,5 | 9,0 | 1,27 | 0,6 | 0,7 | 1,17 |
| 13,1 | 8,5 | 8,6 | 0,99 | 0,6 | 0,7 | 1,17 |
| 13,8 | 8,5 | 6,9 | 1,23 | 0,6 | 0,6 | 1,0 |
| 14,8 | 14,0 | 13,1 | 1,07 | 0,6 | 0,8 | 1,33 |
| 15,8 | 13,0 | 10,9 | 1,19 | 0,7 | 0,7 | 1,0 |
| 23,7 | 21,0 | 17,7 | 1,19 | 1,8 | 2,5 | 1,38 |

Г — полуширина линии.

Нами были выполнены редукционные расчеты с использованием КМИ-спектра с заданной полушириной линии $\Delta=0{,}2$ МэВ и различными амплитудами тормозной подложки $D$. На рис. 4, *а* приведено редуцированное сечение $\sigma_{КМИ}$ для $D=2\%$. Согласие сечений $\sigma_{КМИ}$ и $\sigma_{ТИ}$ и по форме, и по величине дает основание для предсказания наличия в КМИ-спектре никак не учтенной тормозной подложки именно с такой амплитудой.

**Выводы.**

1. Основная причина расхождений КМИ-выходов и ТИ-сечений — отличие формы фотонного КМИ-спектра от δ-функции.

2. Большие значения параметров $\Delta$ и $D$ реальных КМИ-спектров делают необходимой дополнительную обработку КМИ-выходов путем решения интегрального уравнения (1).

3. Метод редукции позволяет эффективно восстанавливать сечения при наглядном представлении взаимосвязи параметров «разрешение — шум».

4. Метод редукции позволяет оценить качество экспериментов с точки зрения возможности обработки и интерпретации их результатов. Показано, что качество ТИ-экспериментов зачастую выше качества КМИ-экспериментов.

5. КМИ-сечения, восстановленные методом редукции, хорошо согласуются с ТИ-сечениями. Использование дополнительных измерений снижает ошибки восстановления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Berman B. L., Fultz S. C. Rev. Mod. Phys., 1975, **47**, p. 713. [2] Варламов В. В. и др. Тез. докл. XXIII Совещ. по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. М., 1983, с. 353. [3] Пытьев Ю. П. Задачи редукции в экспериментальных исследованиях. Мат. сб., 1983, **120**, № 2, с. 240. [4] Fultz S. C. et al. Phys. Rev., 1966, **143**, p. 790. [5] Lochstetf W. A., Stephens W. E. Phys. Rev., 1966, **141**, p. 1002. [6] Ишханов Б. С. и др. Ядерная физика, 1971, **14**, с. 253. [7] Pywell Y. E., Thompson M. N., Berman B. L. Nucl. Instrum. and Meth., 1980, **178**, p. 149.

Поступила в редакцию
19.01.84