УДК 530.145.1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ БОРХЕРСА ДЛЯ ПОЛЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА

Д. Г. Федоров, С. С. Хоружий

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

Среди строгих методов современной квантовой теории поля одно из ведущих мест занимает алгебраический подход. Использование сетей локальных алгебр наблюдаемых и полей, являющихся алгебрами фон Неймана или C^*-алгебрами, лежит в основе техники построения корректной динамики квантовополевых моделей. В то же время на исходном этапе такие модели, как правило, задаются своими вайтмановскими полями — неограниченными операторами $A(\hat{\mathrm{f}})$, удовлетворяющими системе аксиом Вайтмана. Поэтому при исследовании модели возникает стандартная задача построения сети локальных алгебр для заданной системы вайтмановских полей $A(\hat{\mathrm{f}})$. Такую «алгебраизацию» вайтмановской теории возможно осуществлять двояким путем. Мы можем сами поля $A(\mathrm{f})$ рассматривать как алгебраические объекты: соответствие $\mathrm{f}\to A(\mathrm{f})$ возможно интерпретировать как представление топологической алгебры основных функций в алгебру $L(\mathscr{D})$ всех неограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, заданных на общей плотной области $\mathscr{D}$. Это представление можно получить посредством канонической процедуры по положительному функционалу («функционалу Вайтмана») на алгебре основных функций, причем аксиомы вайтмановской теории первоначально вводятся для данного функционала, а каноническая процедура обеспечивает их выполнение для системы операторов представления $A(\hat{\mathrm{f}})$. Такой путь называется, как известно, алгебраическим подходом Борхерса, и алгебра тест-функций, лежащая в его основе, называется алгеброй Борхерса. С другой стороны, мы можем пытаться строить ограниченные функции от операторов $A(\hat{\mathrm{f}})$. Эти ограниченные функции будут порождать некоторые алгебры фон Неймана — полевые алгебры $\mathscr{F}(O)$, и следующая задача здесь будет заключаться в доказательстве для этих алгебр аксиом релятивистской квантовой теории. Каждый из этих двух вариантов имеет свои преимущества и свою сферу применения.

В данной заметке и последующей за ней мы рассматриваем задачи алгебраического описания системы квантованных полей произвольного спина. Сначала мы рассматриваем первый из описанных выше подходов к решению этой задачи, для чего строим обобщение на случай произвольного спина алгебраического формализма Борхерса, сопоставляющего системе вайтмановских полей локальную сеть алгебр неограниченных операторов. Построение локальной сети полевых алгебр фон Неймана будет рассмотрено в следующей работе.

1. Вайтмановское поле произвольного спина (см., например, [1]) есть обобщенная функция $A(\hat{\mathrm{f}})$ на пространстве многокомпонентных основных функций $\hat{f}=(f_1 \ldots f_r)$, $f_i\in S(R^4)$, значения которых принадлежат множеству неограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Спин поля определяется тензорным трансформационным законом основных функций $\hat{\mathrm{f}}$ при преобразованиях Пуанкаре (a, Λ) пространства Минковского M. В рассматриваемом случае произвольного (конечного)

спина указанный закон имеет вид

$$\hat{\mathrm{f}}(x) \to \hat{\mathrm{f}}^{(a,\lambda)}(x); \quad (\hat{\mathrm{f}}^{(a,\lambda)}(x))_i = \sum_{j=1}^{r} V_{ji}(A^{-1}) f_j(\Lambda^{-1}(x-a)), \tag{1}$$

где A — элемент универсальной накрывающей $\mathrm{SL}(2, C)$ связной компоненты $L^{\uparrow}{}_{+}$ группы Лоренца, однозначно определяющий $\Lambda \in L^{\uparrow}{}_{+}$ по формуле

$$\Lambda_{\mu\nu}(A) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^*) \quad \left(\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_i \text{ — матрицы Паули}\right),$$

и $V(A)$ — представление $\mathrm{SL}(2, C)$ конечной размерности r. Поля $A(\hat{\mathrm{f}})$ и им сопряженные $A^*(\hat{\mathrm{f}})$ заданы на общей плотной в $\mathscr{H}$ области $\mathscr{D}$ (области Гординга) и удовлетворяют стандартной системе аксиом Вайтмана. Согласно аксиоме релятивистской ковариантности, в $\mathscr{H}$ задано унитарное сильно непрерывное представление $U(a\Lambda)$ группы Пуанкаре, оставляющее инвариантными область $\mathscr{D}$ и циклический вакуумный вектор $\xi_0 \in \mathscr{D}$ и такое, что

$$U(a\Lambda) A(\hat{\mathrm{f}}) U(a\Lambda)^{-1} = A(\hat{\mathrm{f}}^{(a,\Lambda)}),$$

где $\hat{\mathrm{f}}(a, \Lambda)$ дается формулой (1). Поля $A(\hat{\mathrm{f}})$ образуют полиномиальную алгебру $\mathscr{P}$ на $\mathscr{D}$, неприводимость которой мы ради общности не будем предполагать. Также не предполагается единственность вакуумного вектора ξ_0.

2. В качестве алгебры Борхерса рассмотрим алгебру Ω_0 основных функций, имеющую вид

$$\Omega_0 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (S(R^4)^{\oplus r})^{\otimes n}.$$

Произвольный элемент $\hat{\mathrm{f}} \in \Omega_0$ есть последовательность, n-й член которой

$$(\hat{\mathrm{f}})_n \equiv \hat{f}_n = \{f_{i_1,\ldots,i_n}(x_1, \ldots, x_n)\}_{i_1,\ldots,i_n=1}^{r}$$

есть тензор группы $\mathrm{SL}(2, C)$, преобразующийся по приводимому представлению-произведению $\bigoplus_n V(A^{-1})$ n r-мерных представлений $V(A^{-1})$; число ненулевых членов последовательности предполагается всегда конечным. Естественным обобщением скалярного случая определим на Ω_0 некоммутативное произведение

$$(\hat{\mathrm{f}} \cdot \hat{\mathrm{g}})_n = \sum_{k=0}^{n} f_{i_1,\ldots,i_k}(x_1, \ldots, x_k)\, g_{i_{k+1},\ldots,i_n}(x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Ядерная топология Шварца из $S(R^4)$ переносится в Ω_0 и превращает Ω_0 в топологическую алгебру с единицей $\hat{\mathrm{e}} = (1, 0, 0, \ldots)$. С точностью до эквивалентности определим на Ω_0 представление группы Пуанкаре $\mathscr{P}^{\uparrow}_{+}$

$$\forall (a, \Lambda) \in \mathscr{P}^{\uparrow}_{+}, \quad \forall \hat{\mathrm{f}} \in \Omega_0 \quad \hat{\mathrm{f}} \to \hat{\mathrm{f}}^{(a,\Lambda)} = (\hat{f}_n^{(a,\Lambda)})_{n=0}^{\infty};$$

$$\hat{f}_n^{(a,\Lambda)}(x_1, \ldots, x_n) = \{f_{i_1,\ldots,i_n}^{(a,\Lambda)}(x_1, \ldots, x_n)\}_{i_1,\ldots,i_n=1}^{r}. \tag{2}$$

Термин с точностью до эквивалентности следует понимать так: два элемента алгебры $\hat{\mathrm{f}}$ и $\hat{\mathrm{g}}$, имеющие одинаковую тензорную структуру, преобразуются по эквивалентным представлениям, но не обязательно по тождественно равным.

Как легко видеть, представление согласовано с умножением в Ω_0:

$$(\widehat{\mathbf{f}}\widehat{\mathbf{g}})^{(a,\Lambda)} = \widehat{\mathbf{f}}^{(a,\Lambda)}\widehat{\mathbf{g}}^{(a,\Lambda)}. \tag{3}$$

Группа SL(2, C) допускает два вида неэквивалентных неприводимых представлений. Поэтому можно рассмотреть также алгебру $\Omega_0{}^\eta$, на которой задано сопряженное представление $V(A^*)$. Алгебра $\Omega_0{}^\eta$ состоит из элементов следующего вида:

$$(\widehat{\mathbf{f}}^\eta)_n = \{\bigotimes_n \eta f_{i_n,\ldots,i_1}\}_{i_1,\ldots,i_n=1}^r,$$

где η представляет собой матричную реализацию линейного оператора четности, т. е. генератора пространственного отражения M. Оператор четности обладает следующими свойствами:

$$\eta^2 = E,$$

$$\bigotimes_n (\eta V(A^{*-1})\eta) = \bigotimes_n V(A).$$

Поэтому $(\widehat{\mathbf{f}}^\eta)_n$ преобразуется по $\otimes V(A^*)$. Из-за неэквивалентности представлений $V(A^{-1})$ и $V(A^*)$ на Ω_0 нельзя ввести естественным образом инволюцию (через комплексное сопряжение). Поэтому в качестве алгебры Борхерса будем использовать в дальнейшем $\Omega_0{}^* = \Omega_0 \oplus \Omega_0{}^\eta$. В соответствии с общепринятыми обозначениями $\mathscr{D}^{(mn)}$ и $\mathscr{D}^{(nm)}$ для неприводимых неэквивалентных представлений SL(2, C) получаем, что на $\Omega_0{}^*$ действует представление $\mathscr{D}^{(mn)} \oplus \mathscr{D}^{(nm)}$. Представления указанного вида называются вещественными. Поскольку описание реальных физических полей использует только вещественные представления SL(2, C) (см., например, [2]), данное ограничение на $V(A)$ не является принципиальным.

Теперь на $\Omega_0{}^* = \Omega_0 \oplus \Omega_0{}^\eta$ можно ввести инволюцию

$$(\widehat{\mathbf{f}}^*)_n = \{\bigotimes_n \eta f^+_{i_n,\ldots,i_1}\}_{i_1,\ldots,i_n},$$

где знаком $+$ обозначено комплексное сопряжение применительно к членам последовательности.

3. Описание физической системы в рассматриваемом формализме задается посредством положительного функционала W на алгебре $\Omega_0{}^*$, подчиненного системе аксиом и называемого функционалом Вайтмана. Аксиомы, налагаемые на функционал W, получаются путем прямой переформулировки стандартных аксиом Вайтмана в терминах алгебры $\Omega_0{}^*$ и функционала W.

Аксиому релятивистской ковариантности формулируем обычным образом:

$$W(\widehat{\mathbf{f}}^{(a,\Lambda)}) = W(\widehat{\mathbf{f}}) \quad \forall\, \widehat{\mathbf{f}} \in \Omega_0^*,\ (a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow. \tag{4}$$

Формулировка аксиомы локальности в формализме Борхерса строится таким образом, чтобы обеспечить локальную коммутативность операторов представления П, отвечающего функционалу W. Это приводит к требованию, чтобы нуль-пространство J_0 функционала W включало в себя «идеал локальности» J_l — двусторонний идеал $\Omega_0{}^*$, порождаемый линейными комбинациями произведений элементов $\widehat{\mathbf{f}}$, таких, что

$$\widehat{f}_n(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) -$$
$$- g(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_{i_1}, \ldots, x_n),$$

где $g(x_1, ..., x_n)=0$ при $(x_i - x_{i+1})^2 \geqslant 0$. В нашем случае необходимо учесть, что рассматриваемые поля могут быть и антикоммутирующими. В общей системе полей, включающей в себя как коммутирующие, так и антикоммутирующие операторы, коммутационная структура может быть выражена в виде единого условия, называемого «локальностью с кручением». Это условие формулируется с помощью специального преобразования на множестве полей, которое действует тождественно на коммутирующих (бозонных) операторах и меняет знак антикоммутирующих (фермионных) операторов. Чтобы операторы представления П удовлетворяли локальности с кручением, нам требуется, очевидно, определить преобразование кручения на алгебре Ω_0^*, имеющее унитарную реализацию в пространстве представления П. Далее, с учетом этого преобразования необходимо модифицировать определение идеала локальности J_l. В работе [3] было показано, что операцию кручения можно построить, если задано представление группы Пуанкаре. Искомая операция определяется тогда через преобразование, отвечающее элементу $(0; -I)$ из универсальной накрывающей $\overline{\mathscr{P}}=(M, \mathrm{SL}(2, C))$ группы Пуанкаре.

Следуя [3], рассмотрим на Ω_0^* автоморфизм u_0, отвечающий $0; -I$):

$$u_0 : \widehat{\mathbf{f}} \to \widehat{\mathbf{f}}^{(0,-I)} \quad \forall \widehat{\mathbf{f}} \in \Omega_0^*$$

и определим автоморфизм кручения z на Ω_0^* формулой

$$z = (1+i)^{-1}(1+iu_0); \ \widehat{\mathbf{f}} \to \widehat{\mathbf{f}}^z \equiv (1+i)^{-1}(\widehat{f}^{(0;-I)}) \ \forall \widehat{\mathbf{f}} \in \Omega_0^*.$$

Чтобы найти нужную модификацию идеала локальности, заметим, что в скалярном случае J_l можно записать в виде

$$J_l = \Big\{ \widehat{\mathbf{g}} \in \Omega_0^* \,|\, \widehat{\mathbf{g}} = \sum_{k=1}^{N} \widehat{\mathbf{c}}_k (\widehat{\mathbf{a}}_k \widehat{\mathbf{b}}_k - \widehat{\mathbf{b}}_k \widehat{\mathbf{a}}_k) \widehat{\mathbf{d}}_k; \ \widehat{\mathbf{c}}_k, \ \widehat{\mathbf{d}}_k \in \Omega_0^*; \ \widehat{\mathbf{a}}_k, \ \widehat{\mathbf{b}}_k \in \Omega_0^{*(1)},$$

$$\operatorname{supp} \widehat{\mathbf{a}}_k \sim \operatorname{supp} \widehat{\mathbf{b}}_k, \ N = 1, 2, \ldots \Big\},$$

где по определению

$$\Omega_0^{*(1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\overline{\mathbf{f}} \in \Omega_0^* \,|\, \widehat{f}_n = 0, \ n \geqslant 2\}$$

и символ $\sim$ обозначает взаимную пространственноподобность. Исходя из этого представления, определим идеал $J_{l,z}$ локальности с кручением в алгебре Борхерса следующей формулой:

$$J_{l,z} = \Big\{ \widehat{\mathbf{g}} \in \Omega_0^* \,|\, \widehat{\mathbf{g}} = \sum_{k=1}^{N} \widehat{\mathbf{c}}_k (\widehat{\mathbf{a}}_k \widehat{\mathbf{b}}_k^z - \widehat{\mathbf{b}}_k^z \widehat{\mathbf{a}}_k) \widehat{\mathbf{d}}_k; \ \widehat{\mathbf{c}}_k, \ \widehat{\mathbf{d}}_k \in \Omega_0^*;$$

$$\widehat{\mathbf{a}}_k, \ \widehat{\mathbf{b}}_k \in \Omega_0^{*(1)}, \ \operatorname{supp} \widehat{\mathbf{a}}_k \sim \operatorname{supp} \widehat{\mathbf{b}}_k, \ N = 1, 2, \ldots \Big\}. \tag{5}$$

Соответственно условие обобщенной локальной коммутативности (локальности с кручением) для рассматриваемой системы сформулируем в виде

$$J_{l,z} \subset J_0. \tag{6}$$

Наконец, формулировка условия спектральности не требует измерений: как и в скалярной теории, мы вводим «идеал спектральности» — правый идеал

$$J_{sp} = \{\widehat{\mathbf{f}} \in \Omega_0^* \,|\, f_0 = 0, \ \widetilde{f}_{i_1, \ldots, i_n}(p_1, \ldots, p_n) = 0\}$$

в окрестности конуса

$$p_1 \in \bar{V}^+, \ldots, p_1 + \ldots + p_n \in \bar{V}^+$$

и налагаем требование $J_{sp} \subset J_0$.

4. Функционал W канонически определяет представление Π алгебры Ω_0^* в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, получаемом как пополнение фактор-пространства $\Omega = \Omega_0^*/J_0$ по норме, порождаемой скалярным произведением на Ω,

$$(\xi(\hat{\mathbf{f}}), \xi(\hat{\mathbf{g}})) = W(\hat{\mathbf{g}}\hat{\mathbf{f}}^*) \quad \forall \hat{\mathbf{f}}, \forall \hat{\mathbf{g}}.$$

Операторы представления — неограниченные замыкаемые операторы в $\mathcal{H}$ с плотной областью Ω, определяемые согласно выражению

$$\Pi(\hat{\mathbf{f}})\,\xi(\hat{\mathbf{g}}) \equiv \xi(\hat{\mathbf{g}}\hat{\mathbf{f}}) \quad \forall \hat{\mathbf{f}} \in \Omega_0^* \quad \forall \xi(\hat{\mathbf{g}}) \in \Omega.$$

Образ представления $\Pi(\Omega_0^*) \equiv \mathcal{P}$ есть Op^*-алгебра на области и инволюцией $\Pi(\hat{\mathbf{f}}) \to \Pi(\hat{\mathbf{f}})^* \equiv \Pi^*(\hat{\mathbf{f}})|_\Omega$ и циклическим вектором $\xi_0 = \xi(e)$. Нетрудно проверить, что операторы $\Pi(\hat{\mathbf{f}})$ удовлетворяют системе аксиом Вайтмана.

Релятивистская ковариантность. Из формул (3) и (4) вытекает, что идеал J_0 пуанкаре-инвариантен: $J_0^{(a,\Lambda)} = J_0$ для всех $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$. Поэтому представление Π $\mathcal{P}_+^\uparrow$-ковариантно, т. е. в $\mathcal{H}$ однозначно определены операторы $U(a, \Lambda)$, осуществляющие представление $\mathcal{P}_+^\uparrow$:

$$U(a, \Lambda)\,\xi(\hat{\mathbf{f}}) = \xi(\hat{\mathbf{f}}^{(a,\Lambda)}), \quad \forall (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow, \quad \hat{\mathbf{f}} \in \Omega_0^*.$$

Вследствие (4) все $U(a, \Lambda)$ унитарны и циклический вектор ξ_0 (вакуум) является пуанкаре-инвариантным.

Локальность. Как следствие релятивистской ковариантности, автоморфизм z алгебры Ω_0^* реализуется в представлении Π унитарным оператором Z таким, что

$$\forall \hat{\mathbf{f}} \in \Omega_0^* \quad Z\xi(\hat{\mathbf{f}}) = \xi((1+i)^{-1}(\hat{\mathbf{f}} + i\hat{\mathbf{f}}^{(0;\,-I)})).$$

На полевых операторах $\Pi(\hat{\mathbf{f}})$ оператор Z осуществляет преобразование кручения

$$\Pi(\hat{\mathbf{f}}) \to \Pi(\hat{\mathbf{f}})^z = Z\Pi(\hat{\mathbf{f}})Z^{-1},$$

являющееся автоморфизмом Op^*-алгебры $\mathcal{P}$. С помощью (5) легко получить, что условие (6) для функционала Вайтмана приводит к выполнению аксиомы локальности с кручением:

$$[\Pi(\hat{\mathbf{f}}), \Pi(\hat{\mathbf{g}})^z] = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}} \in \Omega_0^{*(1)} \quad \operatorname{supp}\hat{\mathbf{f}} \sim \operatorname{supp}\hat{\mathbf{g}},$$

и равенство понимается на области Ω.

Спектральность. Аналогично скалярной теории условие для функционала Вайтмана приводит к стандартной формулировке спектральности для представления $U(a, \Lambda)$:

$$U(a, I) = \int e^{ipa}\, dE(p), \quad \operatorname{supp} E(p) \subset \bar{V}_+.$$

Таким образом, система полей произвольного спина может быть описана компактным образом при помощи положительного функционала на алгебре Борхерса, и это описание полностью эквивалентно вайтмановскому.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969, с. 172—174. [2] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1980, с. 260—267. [3] Bisognano J. J., Wichmann E. H. J. Math. Phys., 1976, **17**, p. 303.

Поступила в редакцию
18.05.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 5

УДК 551.465

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАГОННОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ И ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. К. Шелковников, С. М. Новочинский

(*кафедра физики моря и вод суши*)

Метод лабораторного моделирования позволяет довольно успешно изучать отдельные физические процессы, протекающие в морях и океанах [1—4]. Некоторые закономерности сгонно-нагонной циркуляции, а также турбулентного перемешивания в прибрежных районах морей и океанов при наличии стратификации можно исследовать на модели двухслойной жидкости, на верхний, менее плотный слой которой действует касательное напряжение ветра.

В настоящей работе приводятся результаты экспериментального исследования кинематической и динамической структуры нагонной циркуляции, а также процесса перемешивания над откосом в двухслойной жидкости.

Эксперимент выполнялся на установке, описанной в работе [2]. Опыты проводились при разных режимах ветра, мгновенная скорость течения определялась методом киносъемки частиц нейтральной плавучести, в качестве которых использовались шарики диаметром 1—2 мм. Шарики-индикаторы запускались на расстоянии 0,5 м от уреза воды и располагались на разной глубине.

Киносъемка проводилась со скоростью 5 кадров в секунду. Киноаппарат располагался на расстоянии 1 м от оси канала и 1,1 м от уреза воды в зоне нагона. Для регистрации промежутков времени в кадр вводился электрический секундомер, дающий показания с точностью 0,01 с.

При обработке кинокадров определялись мгновенные значения горизонтальной u_i и вертикальной w_i составляющих скорости индикаторов. Всего было получено по 400 значений u_i и w_i с дискретностью 0,2 с для каждого из исследуемых горизонтов верхнего слоя жидкости.

Как и в работе [2], высота поверхностных волн не превышала 0,6 см, и они практически не влияли на процесс перемешивания жидкости.

Так как над поверхностью воды профили скорости воздушного потока до некоторой высоты удовлетворяли логарифмическому закону, то это позволило вычислить значения динамической скорости ветра V_*, а именно: для 1-го режима — 18 см/с ($V_{max}=1,5$ м/с); для 2-го режима — 22,5 см/с ($V_{max}=1,8$ м/с); для 3-го режима — 27 см/с ($V_{max}=2,2$ м/с); здесь V_{max} — максимальная скорость ветра.

После включения вентилятора в верхнем слое жидкости под действием ветра в течение 5—7 мин формировалась сгонно-нагонная цирку-