УДК 517.943.1

О МЕТОДАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Ю. Г. Павленко

(кафедра теоретической физики)

Одним из самых мощных методов точного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений является метод Якоби отыскания производящей функции канонического преобразования (КП) [1]. Однако для разделения переменных гамильтониан должен иметь специальный вид [2, 3], а точное решение может оказаться непригодным для численных расчетов. Поэтому практически приходится использовать приближенные методы. В этом аспекте основным преимуществом теории КП является то, что оказывается возможным, в принципе, найти приближенное решение, не обращаясь непосредственно к уравнениям.

В настоящей статье рассмотрены два метода интегрирования гамильтоновой системы. В п. 1 изложен способ «гамильтонизации» системы нелинейных уравнений первого порядка. Далее, в п. 2, рассмотрены КП в теории специальных функций. В п. 3 на основе канонической теории возмущений решена задача об обращении эллиптических интегралов и получено решение уравнения для вырожденной гипергеометрической функции. В п. 4 развит метод интегрирования на основе процедуры, компенсирующей секулярные члены. Этот метод позволяет исследовать как многопериодические системы, так и системы, совершающие инфинитные движения. В качестве примера рассмотрено решение уравнения с малым параметром при старшей производной. В последней части статьи предложен подход, позволяющий получить решение алгебраических и трансцендентных уравнений методами гамильтоновой динамики.

1. **Приведение уравнений к гамильтоновой форме.** Пусть R^{2s} — фазовое пространство с координатами $x^k=z^k$ и импульсами $p_k=z^{k+s}$ $(k\leqslant s)$, в котором определена симплектическая структура и скобки Пуассона [4]. Произвольная функция $A(z)$ подчиняется в силу канонической системы уравнению

$$\dot{A}=[A, H], \tag{1}$$

где $H=H(z, t)$ — гамильтониан.

Наиболее известен переход от лагранжева к гамильтонову формализму для несингулярных лагранжианов [1, 2]. Для сингулярных лагранжианов разработан специальный подход [5].

Метод удвоения переменных. Пусть s-мерный вектор x^μ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\dot{x}^\mu=F^\mu(x, t). \tag{2}$$

Для приведения (2) к гамильтоновой форме введем пространство с координатами $z^k=x^k$, $z^{k+s}=p_k$ и построим гамильтониан $H=p_\mu F^\mu$. Тогда из (1) получим систему (2) и ассоциированную систему, содержащую импульсы. Заметим, что этот прием позволяет привести к гамильтоновой форме уравнения, полученные феноменологически и не являющиеся экстремалями вариационной задачи. Особый интерес представляют уравнения, описывающие химические реакции [6] и различные экологические процессы [7]. Например, модель «хищник — жертва» описывается уравнениями [7, 8]

$$\dot{x}_1=a(1-x_2)x_1,\ \dot{x}_2=-b(1-x_1)x_2. \tag{3}$$

Если ввести гамильтониан

$$H=a(1-x_2)x_1p_1-b(1-x_1)x_2p_2,$$

то система (3) имеет форму (1).

Неэквивалентные гамильтонианы. Совершая в (3) замену $x_k=e^{x'_k}$, получим систему в пространстве R^4,

$$\dot{x}'_1=a(1-\exp x'_2),\ \dot{x}'_2=-b(1-\exp x'_1), \tag{4}$$

порождаемую гамильтонианом

$$H'=a(1-\exp x'_2)p'_1-b(1-\exp x'_1)p'_2.$$

Если ввести в (3) замену $x_1=e^x$, $x_2=e^p$, то получим канонические уравнения в пространстве R^2:

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=a(1-e^p),$$

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-b(1-e^x),$$

порождаемые гамильтонианом

$$H=a(p-e^p)+b(x-e^x).$$

2. **Канонические преобразования в теории специальных функций.** Линейное уравнение гипергеометрического типа

$$a_2(t)\ddot{x}+a_1(t)\dot{x}+a_0(t)x=0$$

может быть представлено в гамильтоновой форме (1), где

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}gx^2,\ m=a_2\lambda,\ g=a_0\lambda,$$
$$\lambda=a_2^{-1}\exp\int a_1/a_2\cdot dt. \tag{6}$$

В теории дифференциальных уравнений известны замечательные подстановки. В гамильтоновом подходе они возникают как результат КП, порождаемого одной из производящих функций.

А. Полагая в (6) $m=1$ и используя производящую функцию

$$F_1(x,x')=\frac{1}{2}x^2\operatorname{ctg}x',$$

получим каноническое преобразование

$$x=\sqrt{2p'}\sin x',\quad p=\sqrt{2p'}\cos x',$$

являющееся подстановкой Прюфера [9, 10]. Новый гамильтониан

$$H=p'(\cos^2x'+g(t)\sin^2x').$$

Очевидно, p', x' являются переменными действие — угол.

В. Пусть $g(t)>0$ при $t>0$, $g(t)<0$ при $t<0$. Подстановка Лиувилля — Грина [11] порождается производящей функцией

$$F_1(x,x',t)=\frac{1}{2}\sqrt{g}\,x^2\operatorname{ctg}\left(x'+\int_0^t\sqrt{g}\,dt\right),$$

$$F_1(x,x',t)=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,x^2\operatorname{cth}\left(x'+\int_t^0\sqrt{-g}\,dt\right).$$

3. **Метод последовательных приближений.** В основе методов интегрирования (1) лежит теория КП $z \to z'$ к новым переменным. Если преобразование $z=z(z', t)$ является решением (1) с гамильтонианом H_0, то новый гамильтониан $H'=H-H_0$.

В работе [12] показано, что решение уравнения (1) имеет вид

$$A(z(t)) = \Sigma \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \times$$

$$\times [\ldots [A'(z_1', t), H'(z_0', t_1)] H'(z_0', t_2)] \ldots] H'(z_0', t_n)], \qquad (7)$$

где $A'(z', t)=A(z(z', t))$, СП вычисляются по переменным $z'_0 \equiv z'(t_0)$; n-й член ряда можно изобразить в виде диаграммы, причем роль пропагатора играет функция Грина

$$G_{\alpha\beta}(t_1, t_2) = \theta(t_1 - t_2)[z_\alpha(t_1), z_\beta(t_2)]_{z'}.$$

Оценка радиуса сходимости ряда (7) может быть проведена методом мажорант на основе теоремы Коши [3] или принципа сжатых отображений, поскольку (1) эквивалентно нелинейному уравнению Вольтерра. Свобода в выборе гамильтониана нулевого приближения открывает широкие возможности исследования асимптотических разложений и оценок остаточных членов.

Соотношение (7) является основой для построения теории возмущений в классической электродинамике [12], учитывающей индуцированные эффекты, позволяет интегрировать релятивистские уравнения движения [13] и т. д.

Пример 1. Найдем решение уравнения (5) для вырожденной гипергеометрической функции [14]. В этом случае $a_2=t$, $a_1=c-t$, $a_0=-a$. Согласно (6)

$$\lambda = t^{c-1}e^{-t},$$

$$H = \frac{1}{2} t^{-c}e^{t}p^2 - \frac{1}{2} at^{c-1}e^{-t}x^2.$$

Выберем гамильтониан нулевого приближения $H_0=0$. Тогда, подставляя в (7) $A=x$, $H'=H$ и интегрируя по частям, получим

$$x = u_1(t)x' + u_2(t)p', \qquad (8)$$

где u_1, u_2 — два линейно-независимых решения:

$$u_1 = \Phi(a, c, t), \quad u_2 = (1-c)^{-1}t^{1-c}e^{t}\Phi(1-a, 2-c, -t),$$

представленные в виде рядов. Соотношение (8) можно рассматривать как КП к постоянным координатам x' и импульсам p', обращающее новый гамильтониан в ноль. Производящая функция КП (8)

$$F_2(x, p', t) = \frac{1}{2u_1}(\dot{u}_1 x^2 + 2xp' - u_2 p'^2).$$

Пример 2. Обращение интегралов. Эллиптическая функция Якоби $x=\mathrm{sn}(t, k)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x}=f(x)$, где

$$f = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

В соответствии с (2) гамильтониан задачи $H=pf$. Подставляя в (7) $A=x$, $H'=H$, получим

$$x = x' + f(x')t - x'(1+k^2-2k^2x'^2)\frac{t^2}{2!} - f(x')(1+k^2-6k^2x'^2)\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

Поскольку $\mathrm{sn}(0, k)=0$, то, полагая $x'=0$, найдем известное разложение [14]

$$\mathrm{sn}(t, k)=t-(1+k^2)\frac{t^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\frac{t^5}{5!}+\ldots$$

4. **Интегрирование канонических систем методом компенсаций.** Анализ развитого в [15] метода усреднения в канонических переменных позволяет сделать вывод: усреднение вводится для того, чтобы исключить появление секулярных членов, ухудшающих сходимость решения. Поэтому можно предложить новый метод интегрирования систем, содержащих колебательные и апериодические степени свободы на основе процедуры, в принципе не отличающейся от усреднения. В этом смысле наш подход является развитием идеи Боголюбова о том, что в основе метода усреднения лежит замена переменных [16], и близок к методу компенсации диаграмм с опасными знаменателями [17].

Пусть $H=H_0(z)+\Delta H(z, t)$, где H_0 описывает финитные и инфинитные движения. Выберем КП $z=z(z', t)$, которое исключает H_0. Новый гамильтониан $\varepsilon h'(z', t)=\Delta H(z(z', t), t)$. Произведем теперь преобразование $z'=z'(u, t)$ к медленным переменным $u_\mu=(q, \pi)$. Замена переменных является наиболее сложной проблемой в канонических теориях возмущений [18, 19]. С этой целью представим гамильтониан в виде $\varepsilon h'(z', t)=\Gamma(z', t, \varepsilon)+\varepsilon W(z', t, \varepsilon)$, где εW — неизвестная пока функция. Искомую замену будем рассматривать как КП $z'\to u$, порождаемое уравнением

$$\partial_t z'_\mu=[z'_\mu, \varepsilon W(z', t, \varepsilon)],\ z'_\mu(t_0)=u_\mu.$$

Согласно теории КП, новые переменные u_μ удовлетворяют уравнению (1) с гамильтонианом $\bar{H}(u, \varepsilon)=\Gamma(z'(u, t, \varepsilon), t, \varepsilon)$, где $\Gamma(z', t, \varepsilon)=\varepsilon h'(z', t)-\varepsilon W(z', t, \varepsilon)$. Для того чтобы координаты u_μ играли роль медленных переменных, функция εW должна содержать составляющие S и C, явно и неявно зависящие от времени, которые можно определить, налагая два условия. 1. Составляющая S компенсирует зависящую явно от времени часть гамильтониана $\Gamma(z'(u, t), t, \varepsilon)$ и одновременно дает вклад в замену $z'\to u$. 2. Составляющая C дает вклад в гамильтониан Γ и одновременно компенсирует в замене $z'\to u$ не зависящие явно от времени составляющие, которые являются причиной возникновения секулярных членов. В этом — основной принцип интегрирования методом компенсаций. Реализация этих условий приводит к КП [15]

$$z'_\mu=u_\mu+\varepsilon[u_\mu, \tilde{V}h']+\ldots \tag{9}$$

Переменные u_μ удовлетворяют уравнению (1) с гамильтонианом

$$\tilde{H}(u, \varepsilon)=M\left(\varepsilon h'+\frac{\varepsilon^2}{2}[Vh', \tilde{V}h']+\ldots\right), \tag{10}$$

где $h'\equiv h'(u, t)$. Символ M обозначает оператор «усреднения», который обращает в ноль функции, зависящие явно от времени, $Vf=f-Mf$. Тильда обозначает интегрирование по явному времени. Если $H_0(z)$ описывает консервативные периодические системы, то (9), (10) совпадают с решениями по методу Крылова—Боголюбова [16].

Интегрирование неконсервативных систем. В этом случае $H_0=H_0(z, t)$. Решение уравнения (1) содержится в формулах (9), (10), если переопределить действие оператора M. Теперь M — оператор, который в зависимости от конкретного вида $H_0(z, t)$ выделяет компоненту $Vf=f-Mf$, определяющую желаемый характер сходимости ряда (9).

В качестве примера найдем решение сингулярно-возмущенного уравнения [19, с. 136, 301, 339]

$$\varepsilon\ddot{u}+b(t)\dot{u}+c(t)u=0,\ \varepsilon\ll 1. \tag{11}$$

Производя замену $u=xe^{-\varphi}$, где $\varphi=\int kdt$, $k=b/(2\varepsilon)$, получим в соответствии с (5), (6)

$$m=1,\ g(t)=-k^2-\dot{k}+c/\varepsilon.$$

После канонического преобразования

$$x=\frac{1}{\sqrt{2k}}(x'e^{\varphi}-p'e^{-\varphi}),\quad p=\sqrt{\frac{k}{2}}(x'e^{\varphi}+p'e^{-\varphi})$$

новый гамильтониан

$$\varepsilon h'(z',t)=\frac{2c-\dot{b}}{4b}(x'e^{\varphi}-p'e^{-\varphi})^2+\frac{\dot{b}}{4b}(x'^2e^{2\varphi}-p'^2e^{-2\varphi}).$$

Пусть действие оператора M приводит к исключению экспоненциальных функций $e^{\pm\varphi}$. Тогда из (9), (10) находим

$$x'=q-\varepsilon e^{-2\varphi}\frac{c-\dot{b}}{b^2}\pi+\ldots,$$

$$p'=\pi-\varepsilon e^{2\varphi}\frac{c}{b^2}q+\ldots,$$

$$\overline{H}(u,t,\varepsilon)=\left(\frac{\dot{b}}{2b}-r\right)\pi q,\ r=\frac{c}{b}+\varepsilon\frac{c(c-\dot{b})}{b^3}+\ldots$$

Решение «усредненной» системы

$$q=q_0\sqrt{b}e^{m},\ \pi=\pi_0\frac{1}{\sqrt{b}}e^{-m},\ m=\int rdt.$$

Следовательно,

$$u=\sqrt{\varepsilon}\left[q_0\exp(-m)\left(1+\varepsilon\frac{c}{b^2}+\ldots\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi_0}{b}\exp(m-2\varphi)\left(1+\varepsilon\frac{c-\dot{b}}{b^2}+\ldots\right)\right].$$

Заметим, что решение уравнения (11) на основе метода внешних и внутренних разложений, сращивания или метода многих масштабов [19, 20] существенно сложнее изложенного здесь подхода.

5. **Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений методами теории КП.**

А. Найдем корни многочлена $L(\lambda)$ методом компенсаций. Уравнение $L(\lambda)=0$ возникает при интегрировании системы линейных уравнений, связанных с квадратичным гамильтонианом $H=H(z)$. Представим H в виде $H=H_0+\Delta H$. Если известно решение $\lambda^{(0)}{}_n$ уравнения $L(\lambda)=0$, порождаемого гамильтонианом H_0, то поправки $\Delta\lambda_n$ к корням определяются решением (1) с гамильтонианом (10). Для невырожденных гамильтонианов $H_0(z)$ функция (10) имеет диагональную форму $\overline{H}=\Delta\lambda_n\pi_nq_n$.

В. Найдем решение $x=x(y)$ уравнения

$$\varphi(x,y)=0. \tag{12}$$

Предполагая, что выполнены условия существования производной не-

явной функции, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dy}=0.$$

Вводя параметр t, найдем систему

$$\dot{x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \dot{y}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{13}$$

которая в фазовом пространстве $(x,\ p=y)$ имеет гамильтонову форму (1), причем гамильтониан $H=\varphi(x,\ p)$. Если известно решение (12) x_0 при некотором значении y_0, то решение задачи Коши $x(0)=x_0$, $p(0)=y_0$ для системы (13) является решением уравнения (12).

С. Выберем в (12) переменную y в качестве параметра t. Тогда получим [21]

$$x=F(x,\ t),\quad F=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{14}$$

Переходя к фазовому пространству $(x,\ p)$, запишем, согласно (2), гамильтониан $H=pF$. Если известно решение (12) $x=x_0$ при $t=t_0$, то интегральная кривая (14) дает решение (12). В зависимости от конкретного вида функции $\varphi(x,\ y)$ решение соответствующих канонических уравнений определяется формулами (7) или (9), (10).

Рассмотренные в статье методы интегрирования гамильтоновых систем позволяют сделать вывод, что введение канонических переменных существенно упрощает вычисления и позволяет получить универсальные алгоритмы решения на основе теории канонических преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Якоби К. Лекции по динамике. М., 1936. [2] Добронравов В. В. Основы аналитической динамики. М.: Высш. школа, 1976. [3] Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. [4] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. [5] Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1980. [6] Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. [7] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. [8] Волькенштейн М. В. Биофизика. М.: Наука, 1981. [9] Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962. [10] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. [11] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. [12] Павленко Ю. Г. ТМФ, 1981, 49, с. 92. [13] Павленко Ю. Г. Изв. вузов. Радиофизика, 1982, 25, с. 1319. [14] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. [15] Павленко Ю. Г. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1982, 23, № 2, с. 61. [16] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. [17] Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Т. 3. Киев, 1971, с. 29. [18] Борн М. Лекции по атомной механике. Киев, 1934, с. 247. [19] Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. [20] Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. [21] Моденов В. П. Вестн. Моск. ун-та. Вычислит. матем. и кибернет., 1983, № 2, с. 62.

Поступила в редакцию
07.09.83