где

$$E_0 = \frac{c\mu\Delta n}{\pi\hbar\gamma_1}\psi_2 \sin\psi_1 \sin\psi_3 \exp[-\gamma_2(2t_{20}-\tau)-\gamma_1(t_{30}-t_{10})];$$

$$f_1 = 1;\ f_2 = -e^{-\gamma_1 l/c};\ \Delta\rho_1^2 = u^2 t_{30}(t_{30}+\tau);\ \Delta\rho_2^2 = \Delta\rho_1^2 + \frac{\gamma_1 l}{2c}B_-;$$

$$A = \frac{u^2 k\tau}{2c}[(\gamma_1-\gamma_2)\tau-\gamma_1 t_{40}];\ B_\pm = k^{-2}\left[1 \pm \frac{2u^2k^2}{\gamma_1}(t_{30}+\tau)\right].$$

Ширина этой функции определяется величинами $\Delta\rho_{1,2}$, зависящими от смещения атомов за время взаимодействия света со средой. Для типичных параметров систем ОВФ на парах щелочных металлов ($l=5$ см, $u=10^4 \div 10^5$ см/с, $\gamma_1=10^7$ с, $\gamma_2=5\cdot 10^7$ с, $k=10^5$ см$^{-1}$, $t_{30}=10^{-8}$ с) $\Delta\rho_1 \simeq \Delta\rho_2 \simeq 10^{-3} \div 10^{-4}$ см. При $\tau=0$ именно эта величина определяет предельную разрешающую способность системы.

Разрешающая способность системы нестационарного ОВФ ограничивается не только рассмотренным здесь эффектом Доплера, но и расходимостью волн накачки [6]. Если их угловой спектр определяется дифракционной расходимостью на входной апертуре, то соответствующий вклад в ширину функции разброса будет того же порядка, что и $\Delta\rho_{1,2}$ при диаметре пучков около 1 мм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шумейкер Р. В кн.: Лазерная и когерентная спектроскопия. М.: Мир, 1982. [2] Маныкин Э. А. и др. Изв. АН СССР, сер. физ. 1982, **46**, с. 538. Самарцев В. В. Там же, с. 524. [3] Набойкин Ю. В., Самарцев В. В., Шейбут Ю. Е. Укр. физ. журн., 1981, **5**, с. 705. [4] Штырков Е. И. и др. ЖЭТФ, 1981, **81**, с. 1977. [5] Fujita M. et al. J. Phys. Soc. Japan, 1982, **51**, p. 2582. [6] Воронин Э. С., Петникова В. М., Шувалов В. В. Квант. электроника, 1981, № 5, с. 917.

Поступила в редакцию
09.01.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 5

УДК 517.9

СТРУКТУРА ХАОСА ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ

Н. И. Желудев, В. А. Макаров, А. В. Матвеева, Ю. П. Свирко

(кафедра общей физики и волновых процессов)

1. Исследование колебаний ангармонического осциллятора с периодической внешней силой (ВС) представляет значительный интерес для многих областей физики. Его поведение в приближении кубической нелинейности определяется уравнением

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+x-\gamma x^3=\cos\omega t, \qquad (1)$$

которое, например, хорошо описывает работу нелинейных колебательных контуров. В оптике ангармонический осциллятор широко используется в качестве наиболее простой модели взаимодействия связанных зарядов с полем электромагнитной волны для расчета нелинейной поляризации среды.

В последние годы многие нелинейные уравнения интенсивно исследовались численно. В ряде случаев были обнаружены решения с непре-

рывным спектром [1—7], внешне воспринимающиеся как хаотические. Переход к ним (при изменении параметров системы) происходит через бесконечную последовательность удвоений периода колебаний.

Уравнение (1) при $\gamma>0$ ранее решалось только на аналоговой машине [2], не дающей большой точности. В данной работе впервые сообщаются результаты анализа решения (1), полученного методом численного интегрирования, при различных положительных параметрах нелинейности γ. Детально исследованы частотные границы и тонкая структура области динамического хаоса, найдены интервалы частот $\Delta\omega_{k,n}$, на которых период колебаний составляет $k\cdot 2^n$ периодов ВС ($k=1, 3, 5, \ldots$; $n=0, 1, 2, 3, \ldots$), обсуждается параметрическая гипотеза возникновения движения с непрерывным спектром.

2. Для конкретных α и γ нами исследовалось изменение фазового портрета и установившегося спектра решения (СР) при адиабатическом уменьшении ω, что по существу воспроизводило решение (1) на

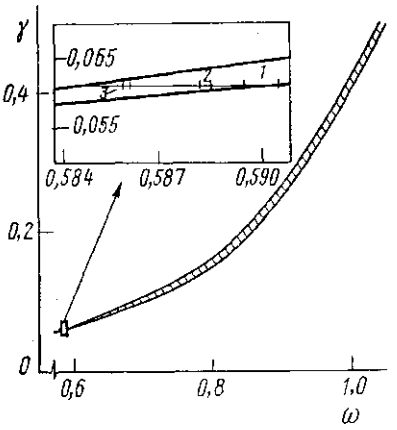

Рис. 1. Частотные границы областей умножений периода колебаний и областей динамического хаоса. Интервалам *1—3* соответствуют каскады $\omega/2^n$, $\omega/(3\cdot 2^n)$, $\omega/(5\cdot 2^n)$

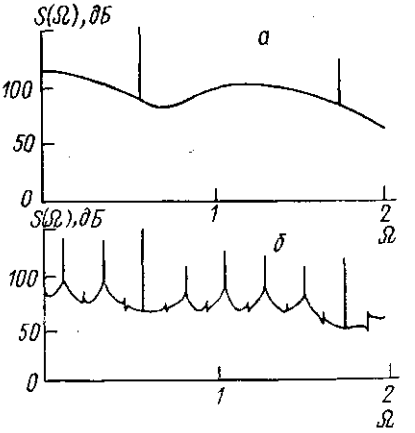

Рис. 2. Амплитудный спектр решения — динамический хаос ($\omega=0{,}58846$) (*а*) и режим пятикратного увеличения периода ($\omega=0{,}5861$) (*б*)

аналоговой машине [2]. Для численного интегрирования (1) использовалась традиционная разностная схема четвертого порядка точности. Выбор шага по времени производился из условия обеспечения точности расчетов порядка 10^{-6}. В ходе численного эксперимента контролировалась устойчивость получаемых результатов к уменьшению шага разностной схемы более чем на порядок, а также к увеличению длительности временной развертки, на базе которой проводилось вычисление СР. Кроме этого, в отдельных частотных интервалах сравнивались результаты, даваемые различными модификациями разностной схемы четвертого порядка. Все это позволило с высокой точностью определить $\Delta\omega_{k,n}$ и области динамического хаоса. Критерием последнего служило резкое возрастание пьедестала в выводимом СР (в среднем до 90 дБ).

Обнаружено, что режимы удвоений периода колебаний и хаотическое движение ангармонического осциллятора возможны в узком частотном интервале, если γ больше некоторой критической величины γ_k, являющейся функцией затухания в системе (рис. 1, $\alpha=0{,}4$, $\gamma_k=0{,}058$). При $\gamma<\gamma_k$ вне зависимости от частоты ВС имеют место только периодические решения.

Характер перехода системы в хаотическое состояние качественно одинаков для $\gamma > \gamma_k$, поэтому для определенности будем считать $\gamma = 0{,}061$. При приближении к заштрихованной области справа в СР резко возрастают амплитуды четных гармоник. Дальнейшее уменьшение ω (область $\omega/2^n$, см. рис. 1) сопровождается каскадом удвоения периода колебаний. В СР появляются субгармоники $\omega/2$, $\omega/4, \ldots, \omega/2^n$, при $\omega < 0{,}5895$ изменение $x(t)$ носит хаотический характер (рис. 2, *а*).

При дальнейшем уменьшении ω внутри заштрихованной области рис. 1 впервые для данного уравнения обнаружены интервалы частот, где решение вновь становится периодическим, но возникают более сложные последовательности умножений периода колебаний. Так, при $0{,}5885 > \omega > 0{,}5882$ на фоне достаточно высокого пьедестала возникает каскад $3 \cdot 2^n$: в СР постепенно появляются субгармоники $\omega/3$, $\omega/6, \ldots, \omega/(3 \cdot 2^n)$. При меньших значениях ω изменение $x(t)$ носит хаотический характер. Новая область периодичности 5, 10, 20, ..., $5 \cdot 2^n$ периодов ВС появляется при $\omega < 0{,}58615$, а затем опять наступает динамический хаос. На рис. 2, *б* показан СР, соответствующий пятикратному (по сравнению с ВС) увеличению периода колебаний. Зафиксирована небольшая область, где период колебаний составляет 7, 14, ... (каскад $7 \cdot 2^n$) периодов ВС.

Величина частотного интервала $\Delta\omega_{1,n}$ чувствительна к росту γ. При $\gamma \sim 10^{-1}$ уже первые члены последовательности $a_n = \Delta\omega_{1,n}/\Delta\omega_{1,n+1}$ близки к константе $a_\infty = 4{,}669$ (4,25; 4,33; 4,40; 4,46), введенной Фейгенбаумом для значительно более простого уравнения [8]. При больших γ отличие более существенное.

Описанная картина изменения СР существенно не меняется при других α. С ростом поглощения расширяются частотные интервалы, где происходят удвоения периода колебаний и хаотическое движение ангармонического осциллятора, возрастает $\gamma_k(\alpha)$. Так, например, $\gamma_k(0{,}2) = 0{,}015$, а $\gamma_k(0{,}6) = 0{,}178$.

3. Одной из возможных причин возникновения решений уравнения (1) с непрерывным спектром является параметрическое усиление шума, возникающего в процессе решения. Проиллюстрируем это следующим образом. Будем искать решение (1) в виде

$$x(t) = x_0(t)\exp(i\omega t) + x_1(t)\exp(i\omega_1 t) + x_2(t)\exp(i\omega_2 t) + \text{к. с.} \qquad (2)$$

Здесь $x_0 \gg x_{1,2}$ — медленные амплитуды, $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$. Условие параметрического усиления на кубической нелинейности, обеспечивающее рост в СР компонент на частотах $\omega_{1,2}$, находим, подставляя (2) в (1):

$$\alpha^2 < (3\gamma|x_0|^2)^2/(\omega_1\omega_2) - \omega^2(1 - \omega_1\omega_2 - 6\gamma|x_0|^2)^2/(\omega_1\omega_2)^2, \qquad (3)$$

где $|x_0|^2$ задается уравнением

$$4|x_0|^2((1 - \omega^2 - 3\gamma|x_0|^2)^2 + \alpha^2\omega^2) = 1. \qquad (4)$$

Нелинейность обогащает новыми гармониками спектр усиленного широкополосного шумового сигнала. Разумеется, непосредственное сравнение вычисленных по формулам (3), (4) частотных интервалов с результатами численного эксперимента требует учета в (2) большого (бесконечного) числа нечетных высших гармоник, а также других параметрических процессов.

В заключение отметим, что описанный механизм имеет место только в том случае, если в системе есть шум с достаточно широким спектром. Хаотическое изменение $x(t)$ установлено пока в численном и аналоговом экспериментах, где его наличие несомненно. Качественное совпадение данных работ [2] ($\alpha = 0{,}4$; $\gamma = 0{,}053$) с отдельными нашими ре-

зультатами свидетельствует о том, что природа шума не влияет на закономерности изменения СР, которые определяются, видимо, самим уравнением.

Авторы глубоко благодарны С. А. Ахманову, В. А. Выслоуху, В. П. Кандидову, П. С. Ланде, М. И. Рабиновичу за полезные обсуждения и Ю. И. Кузнецову за ценные критические замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Калафати Ю. Д., Малахов Б. А. Письма в ЖЭТФ, 1983, **37**, с. 486. [2] Huberman B., Crutchfield I. P. Phys. Rev. Lett., 1979, **43**, p. 1743. [3] Дмитриев А. С., Кислов В. Я., Спиро А. Г. Радиотехн. и электроника, 1983, **28**, с. 2430. [4] Афраймович В. С., Рабинович М. И., Угодников А. Д. Письма в ЖЭТФ, 1983, **38**, с. 64. [5] Chui S. T., Ma K. B. Phys. Rev. A, 1982, **26**, p. 2262. [6] Крюков Б. И., Середович Г. И. ДАН СССР, 1981, **258**, с. 311. [7] Novak S., Frehlich R. G. Phys. Rev. A, 1982, **26**, p. 3660. [8] Фейгенбаум М. УФН, 1983, **141**, с. 343.

Поступила в редакцию
30.01.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 5

УДК 621.384.633

КАЧЕСТВО ПУЧКА ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЦЕЛЫХ РЕЗОНАНСОВ В ЦИКЛОТРОНЕ

Л. А. Саркисян, Т. А. Чернышенко

(НИИЯФ)

Повышение энергии протонов и ионов свыше E_0 на нуклон в кольцевых изохронных циклотронах связано с прохождением ряда целых резонансов по свободным радиальным колебаниям $Q_r=2, 3, 4, \ldots$ [1, 2]. Обычно прохождение целых резонансов в ускорителях связывалось с искажением замкнутой орбиты и значительным послерезонансным увеличением амплитуды свободных радиальных колебаний частицы. Устоявшаяся точка зрения [3, 4] состояла в том, что в стационарном режиме ($Q_r=\mathrm{const}$) в линейной системе искажение замкнутой орбиты бесконечно (частица резонанс не проходит) и нелинейность не может ограничить искажение орбиты в резонансе, создавая лишь новые проблемы. В силу этого считали, что достижимая энергия протонов в циклотроне ограничена целым резонансом $Q_r=2$ (энергия не более E_0) [3, 4].

Такая точка зрения принципиально неприменима к изохронному циклотрону, так как частота $Q_r\approx\gamma=1+W/E_0$ естественным образом возрастает в процессе ускорения (движение нестационарно) и существует сильная и сложная нелинейность, приводящая к неизохронности движения и силе трения, пропорциональной при больших скоростях квадрату скорости (энергии E_0 соответствует скорость $\beta=0{,}86$) [5—7]. В работе [5] впервые на основе численного моделирования по полным (нелинейным по r и r') уравнениям движения было установлено, что прохождение протонами наиболее опасного целого резонанса $Q_r=2$ сопровождается лишь конечным искажением замкнутой орбиты при сохранении эмиттанса пучка.

В магнитном поле с пространственной вариацией неоднородное нелинейное уравнение свободных радиальных колебаний имеет вид

$$x''+Q_{r0}^2x+\frac{x^3}{6}\frac{r\varepsilon}{\lambda\!\!\!^{-3}}\sin(r/\lambda\!\!\!^{-}-N\varphi)-\frac{1}{2r}x'^2=-r\varepsilon_s\cos s\varphi. \qquad (1)$$