ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 6

УДК 539.21:537.1; 548:537.1

ФОТОПРОВОДИМОСТЬ И ФОТОЭДС В РЕЛАКСАЦИОННОМ РЕЖИМЕ (II)

Ю. П. Дрожжов

(кафедра физики полупроводников)

В работе [1] была поставлена задача о вычислении вольт-амперной характеристики (ВАХ) образца, освещенного светом, в условиях, когда максвелловское время в образце значительно превышает характерное время рекомбинации носителей заряда. В этой работе было получено равновесное распределение концентрации носителей заряда в полупроводнике, когда один из контактов к полупроводнику n-типа инжектирует дырки.

Пусть теперь на образец, площадь поперечного сечения которого $S=1$, падает свет интенсивности i и к образцу приложено напряжение v (обозначения те же, что и в работе [1]). Предположим, что i и j в определенном смысле малы, соответствующие критерии будут указаны ниже.

В этих условиях

$$u^{-1}=v+m,\quad m=i\,\frac{g(v)+g(v^{-1})}{g(v^{-1})+v^{-2}g(v)}.$$

Здесь введено обозначение

$$g(v)=g^c(v)=g_0v^6,$$

v приведено в [1, (31)].

Для m получим уравнение

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{jv}{v^2+1}+\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}+\frac{v^2}{v^2+1}\frac{d}{dx}\frac{m}{v}\right\}=g(v^{-1})-g(v)\left(1-\frac{m}{\Delta v}\right)+g_0^c. \tag{1}$$

Решение (1) ищем в виде

$$v=\mu_0e^{y+z},$$

где $z|_{0,L}=0$ (см. [1, (21) и (25)]). (2)

Тогда для z получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{dz}{dx}+\frac{j}{2\operatorname{ch}\theta}+i\frac{e^{-\theta}}{2\operatorname{ch}\theta}\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{ch}\theta/\Delta}{\operatorname{ch}\theta}\right\}=i\frac{g(v)}{\Delta}\frac{\operatorname{ch}\theta/\Delta}{\operatorname{ch}\theta}, \tag{3}$$

$$\theta\equiv-y-\ln u_0. \tag{4}$$

С учетом (2) можно продолжить z на отрезок $[0,2L]$ и разложить в ряд Фурье:

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi nx}{L}. \tag{5}$$

Поскольку коэффициентные функции в уравнении (3) заметно отличны от нуля лишь в некоторой области внутри образца, их тоже можно считать нулями на границах образца и продолжить нечетным образом на отрезок $[0,2L]$. Тогда

$$-A_n\frac{\pi^2n^2}{L}+2\int_0^L\sin\frac{\pi nx}{L}\frac{d}{dx}\left\{\frac{j}{2\operatorname{ch}\theta}+i\frac{e^{-\theta}}{2\operatorname{ch}\theta}\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{ch}\theta/\Delta}{\operatorname{ch}\theta}\right\}dx-$$

$$-2\int_0^L \frac{i}{\Delta}\frac{e^{\theta/\Delta}\operatorname{ch}\theta/\Delta}{\operatorname{ch}\theta}\sin\frac{\pi n x}{L}dx=0, \tag{6}$$

откуда (см. Приложение I)

$$A_n\frac{\pi^2 n^2}{L}=2\left(-j\frac{\pi n}{2L}\Delta x\cos\frac{\pi n x}{L}-\frac{i}{\Delta}\Delta x\sin\frac{\pi n x_1}{L}+\right.$$
$$\left.+\frac{i\pi n}{2L}\Delta x\cos\frac{\pi n x_1}{L}-\frac{\pi i}{2}\sin\frac{\pi n x_1}{L}\right). \tag{7}$$

Здесь x_1 определяется из условия

$$\theta=0, \tag{8}$$

Δx — ширина максимума коэффициентных функций вблизи x_1, определяемая из условия

$$\Delta x\cdot\frac{dy}{dx}\approx 1.$$

Используя (4) и [1, (31)], найдем

$$\zeta_0\ln\frac{v_0}{u_0}\frac{\Delta x}{L}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta_0\right)\frac{1}{\cos^2(\pi/2-\zeta_0)(1-x_1/L)}\approx 1.$$

Поскольку $\zeta_0\ll 1$, используя (8), получим

$$\Delta x\approx\frac{4L}{\pi}\zeta_0\frac{\ln v/u_0}{\ln^2 u_0},$$

$$\frac{\pi x_1}{2L}=-\zeta_0\frac{\ln v_0}{\ln u_0}\ll 1. \tag{9}$$

Таким образом, мы нашли коэффициенты A_n в разложении (5). Нас, однако, интересует ВАХ образца. Включение света и поля приводит к перераспределению зарядов в образце и появлению добавочного потенциала ΔV, который связан с введенной ранее величиной z:

$$\Delta V=z+\int_0^x\left\{\frac{j}{2\operatorname{ch}\theta}+i\frac{e^{-\theta}}{2\operatorname{ch}\theta}\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{ch}\theta/\Delta}{\operatorname{ch}\theta}\right\}dx. \tag{10}$$

Граничное условие к (10) имеет вид

$$\Delta V(L)=eV,\qquad z(L)=0.$$

Следовательно, уравнение ВАХ можно записать в виде

$$eV=\int_0^L\left\{\frac{j}{\operatorname{ch}\theta}+i\frac{e^{-\theta}}{2\operatorname{ch}\theta}\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{ch}\theta/\Delta}{\operatorname{ch}\theta}\right\}dx. \tag{11}$$

Уравнения (3) и (10) позволяют построить итерационную (по i и j) схему нахождения решения системы [1, (20)]. Действительно, представим коэффициенты A_n в виде ряда

$$A_n=A_n^{(0)}i+A_n^{(1)}j+A_n^{(2)}i^2+A_n^{(3)}j^2+A_n^{(4)}ij+\ldots, \tag{12}$$

тогда последующие коэффициенты можно находить из (3) так, как это было сделано выше, а уравнение (11) позволяет последовательно вычислять ВАХ с желаемой точностью.

Мы ограничимся членами, квадратичными по i и j. Как видно из (11), в этом случае достаточно знать лишь $A_n^{(0)}$ и $A_n^{(1)}$ из (12), т. е. в (11) в качестве θ необходимо взять

$$\theta = -y - z - \ln u_0.$$

Поступая, как и раньше, получим

$$eV = j\Delta x_{ij}/2 - \pi i. \tag{13}$$

Здесь

$$\Delta x_{ij} \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=x_1+\delta x} \sim 1,$$

δx — смещение положения максимума при наличии поля и света. Учитывая малость i и j, можно найти

$$\Delta x_{ij} = \frac{4L}{\pi}\zeta_0 \frac{\ln u_0^{-1} + \ln v_0 - z(x_1)}{\ln^2 u_0 - 2z(x_1)\ln u_0^{-1}} \tag{14}$$

и

$$\zeta_0 \ln\frac{v_0^{-1}}{u_0}\,\frac{\delta x}{x_1}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x_1}{2L} = z(x_1). \tag{15}$$

Здесь x_1 определяется из (9). Чтобы найти $z(x_1)$, необходимо просуммировать ряд (5) с коэффициентами A_n из (7). Выполняя суммирование (см. Приложение II), получим

$$z(x_1) = (i-j)\,\Delta x\left(\frac{1}{4} - \frac{x_1}{L}\right) - i\left(\frac{2\Delta x}{\Delta} + \pi\right)x_1\left(\frac{1}{2} - \frac{x_1}{L}\right) \tag{16}$$

или, учитывая, что $x_1/L \ll 1$,

$$z(x_1) \approx j\frac{\Delta x}{4} - \frac{\pi x_1}{2} i.$$

Подставляя в (14), (15) и используя (13), получим

$$V = \frac{1}{2} jL\zeta_0 \left[\frac{\ln u_0^{-1} + \ln v_0}{\ln^2 u_0} + \left(i\zeta_0 \frac{\ln v_0}{\ln u_0^{-1}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - j\zeta_0 L \frac{\ln u_0^{-1} + \ln v_0}{\pi \ln^2 u_0}\right)\frac{\ln u_0^{-1} - 2\ln v_0}{\ln^3 u_0^{-1}}\right] - \pi i. \tag{17}$$

Введем обозначение

$$R_0 = \frac{1}{2} L\zeta_0 \frac{\ln u_0^{-1} + \ln v_0}{\ln^2 u_0}.$$

Тогда (17) перепишется в виде

$$V = jR_0\left(1 - i\frac{R_0}{L} - j\frac{R_0}{2\Delta\varphi}\right) - \pi i. \tag{18}$$

Как видно из (18), величина R_0 имеет смысл сопротивления образца ($S=1$) при i и $j \to 0$ (на омическом участке ВАХ).

В стандартных условиях опыта по измерению фотопроводимости напряжение, снимаемое с сопротивления нагрузки r, можно найти из уравнения

$$rj + V(j) = V_{\text{п}}.$$

Здесь $V_п$ — напряжение батареи, $V(j)$ — напряжение на образце. Используя (18) и учитывая, что обычно $r \ll R_0$, получим

$$-jR_0\left(1 - i\frac{R_0}{L} - j\frac{R_0}{2\Delta\varphi}\right) + \pi i = V_п.$$

Отсюда

$$j_{1,2} = \frac{\Delta\varphi}{R_0}\left[\left(1 - \frac{i}{L}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{i}{L}\right)^2 - 2\frac{\pi i - V_п}{\Delta\varphi}}\right] =$$

$$= \frac{\Delta\varphi}{R_0}\left[1 \pm \sqrt{B(V_п; i)}\right]. \qquad (19)$$

Из двух корней необходимо выбрать тот, абсолютная величина которого меньше (наше рассмотрение справедливо при малых токах).

Как видно из (19), $j \sim i$ при малых интенсивностях света, $j \sim 1 - \sqrt{B}$ при $\pi i/\Delta\varphi \sim 1$ (расчет справедлив для $i < \Delta\varphi/\pi$).

Обратимся теперь к температурной зависимости фототока. При малых интенсивностях света

$$|j| \approx (-\pi i + V_п)/R_0. \qquad (20)$$

Из опыта [2] известно, что

$$R_0 \sim e^F.$$

Здесь F — расстояние от c-зоны до уровня Ферми в единицах kT. Поскольку

$$i = sJ/(\alpha n_i),$$

то температурная зависимость фототока при малых i будет иметь вид

$$j \sim e^{E^+}, \quad E^+ \equiv \Delta\varphi. \qquad (21)$$

Таким образом, j имеет экспоненциальную температурную зависимость с положительным показателем. (В принципе в E^+ могут содержаться члены, линейные по температуре и обусловленные изменением ширины запрещенной зоны с температурой. Однако, как правило, вклад этих членов несуществен.)

С ростом интенсивности света растет член в выражении для ВАХ, соответствующий фотоЭДС (аналог вентильной фотоЭДС). Возрастание фотоЭДС приводит к «сбрасыванию» рабочей точки на запорную ветвь ВАХ, на которой

$$j = \frac{\Delta\varphi}{R_0}\left[\left(1 - \frac{i}{L}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{i}{L}\right)^2 - 2\frac{\pi i - V_п}{\Delta\varphi}}\right]. \qquad (22)$$

Здесь температурная зависимость j определяется температурной зависимостью R_0, т. е.

$$j \sim e^{-E^-}, \quad E^- \equiv F. \qquad (23)$$

Отметим, что в опыте обычно величина E^- меньше F. Трудно было бы, однако, в рамках рассматриваемой простой модели ожидать лучшего совпадения с экспериментом. Действительно, мы не учитывали зависимости параметров центра (s и α) от его энергии ионизации и зарядового состояния. Учет этой зависимости мог бы, по-видимому, улучшить согласие теории с экспериментом.

Автор искренне благодарен проф. В. Л. Бонч-Бруевичу за плодотворные дискуссии по содержанию данной работы.

Приложение I.

Вычислим интеграл, фигурирующий в последнем члене в левой части уравнения (6):

$$J=\int_0^L \frac{e^{\theta/\Delta}\,\mathrm{ch}^{\theta/\Delta}}{\mathrm{ch}\,\theta}\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx.$$

Поскольку по постановке задачи $\Delta\gg1$, подынтегральное выражение имеет острый максимум при $\theta=0$. Поэтому приближенно

$$J\approx\sin(\pi n x/L)\cdot\Delta x,$$

где x_1 определяется из условия

$$\theta=0,$$

а Δx — ширина максимума, определяемая условием

$$\Delta x\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=x_1}\sim1.$$

Аналогично оцениваются и другие интегралы в (6).

Приложение II.

Суммирование осуществляется по следующей формуле:

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}z_n\approx\int_0^{\infty}z_n dn-z_0=\int_0^{\infty}\frac{i-j}{\pi}\Delta x\frac{\sin(\pi n x/L)\sin(\pi n x_1/L)}{n}\,dn-(i-j)\frac{\Delta x\cdot x}{L}-$$

$$-\frac{iL}{\pi^2}\left(2\frac{\Delta x}{\Delta}+\pi\right)\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi n x/L)\sin(\pi n x_1/L)}{n^2}\,dn+i\frac{x}{L}x_1\left(\frac{2\Delta x}{\Delta}+\pi\right).$$

В дальнейшем члены, содержащие отношение $\Delta x/\Delta$, опущены, поскольку $\Delta\gg1$ и $\Delta x\ll1$. Вычисление интегралов, фигурирующих в формуле, производится стандартными методами, в результате получаем формулу (16), приведенную в основном тексте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дрожжов Ю. П. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1984, 25, № 5, с. 37.
[2] Arnoldussen T. C., Bube R. H. J. Appl. Phys., 1972, 43, p. 1798.

Поступила в редакцию
16.11.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 6

УДК 517.943.1

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Ю. Г. Павленко

(кафедра теоретической физики)

Для решения задач теоретической физики используются в основном приближенные методы. Причина этого в том, что небольшое число точных решений часто имеют форму, непригодную для численных расчетов. С другой стороны, отсутствуют общие методы решения уравнений с нелинейностями, переменными коэффициентами или произвольными граничными условиями. В этом случае теория возмущений является основным инструментом вычислений в широком круге задач