

Измерения группы быстрых времен ( $\gamma_{2,3}^{-1}$ ) проводятся при  $\tau=0$ . Вектор поляризации поля по-прежнему повернут на угол  $\varphi_0$  по отношению к  $E_{1,2}$ . Перестройка частоты  $\omega_3$  относительно  $\omega_{1,2}$  приводит к спаду нелинейного отклика:

$$P_3(\varphi_0, \Delta\omega) \sim (\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5 - i\Delta\omega)^{-1} \left[ (\gamma_2 - i\Delta\omega)^{-1} + \frac{2\gamma_3}{\gamma_2} (\gamma_1 + \gamma_5 - i\Delta\omega)^{-1} \right].$$

Численное определение оставшихся неизвестными времен релаксации  $\gamma_{2,3}^{-1}$  проводится аналогично методике работы [2].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Smirl A. L. Dynamics of high-density transient electron-hole plasmas in germanium. Preprint. Academic Press, N. Y., 1983. Boggess T. F., Smirl A. L., Wherrett B. S. Opt. Comm., 1982, 43, p. 128. Linde J. R., Moss S. C., Smirl A. L. Phys. Rev., 1979, B20, p. 2401. [2] Yajima T., Souma H. Phys. Rev., 1978, A17, p. 309. Yajima T., Taira Y. J. Phys. Soc. Japan, 1979, 47, p. 1620. [3] Lessing H. E., Von Jena A. Chem. Phys. Lett., 1976, 42, p. 213. [4] Васильева М. А., Малышев В. И., Масалов А. В. Кр. сообщ. по физике ФИАН СССР, 1980, № 1, с. 35. [5] Апанасевич П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом. Минск, 1977. [6] Винецкий В. Л., Кухтарев Н. В., Соскин М. С. Квант. электроника, 1977, 4, с. 420. [7] Файнберг Б. Д. Опт. и спектр., 1983, 55, с. 1098. [8] Aihara M. Phys. Rev., 1982, B25, p. 53. [9] Ермолаев В. Л. и др. Безызлучательный перенос энергии электронного возбуждения. Л., 1977.

Поступила в редакцию  
15.12.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1984, т. 25, № 6

УДК 534.222.2

#### ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

В. Э. Гусев

(кафедра общей физики и волновых процессов)

В последние годы появилось новое направление в исследованиях возможностей подавить каскадные процессы перекачки энергии вверх по спектру, которые приводят к эффективному поглощению интенсивных волн в нелинейных средах без дисперсии. В первую очередь речь идет об изучении эволюции нелинейного звука в среде с резонансным поглотителем [1—3]. Установлено, что в простейшем случае дополнительное поглощение второй гармоники приводит к увеличению длины образования разрыва в акустической волне [3]. В более общем случае путем селективного поглощения ряда комбинационных частот можно повысить эффективность избранного параметрического процесса. В работе [3] развит математический аппарат для расчета волновых взаимодействий в средах при наличии распределенного поглотителя. Однако получить точное аналитическое описание эволюции волны в свободном полупространстве не удается. Кроме этого, остается открытой проблема практического создания нелинейных сред с заданными диссипативно-дисперсионными свойствами.

В настоящей работе изучаются возможности управления процессом растекания энергии по спектру при установлении нелинейных колебаний акустического резонатора. Показано, что при определенных условиях любое пространственно-локализованное воздействие на спектр акустической волны, осуществляемое в резонаторе, играет та-

кую же роль, какую при распространении волны в полупространстве играет непрерывно-распределенное воздействие. Тем самым в ряде случаев можно обойти проблему создания сред с необходимыми объемными свойствами, используя резонаторы с определенными свойствами границы. Отметим, что в отличие от случая свободного распространения волн [3] для резонатора физический смысл имеет исследование стационарных волн, что позволяет упростить математическую задачу и продвинуться дальше по пути точного аналитического описания нелинейных волновых процессов в средах со сложными диссипативными свойствами.

Обратимся к изучению процесса установления нелинейных колебаний в резонаторе с жесткими границами, расположенными в плоскостях  $x' = 0, L$  ( $L$  — длина резонатора,  $x'$  — пространственная координата). Пусть, для определенности, резонатор возбуждается гармоническими колебаниями идеально отражающей границы  $x' = 0$ :

$$v(x' = 0) = v_1 \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь  $v_1$  — амплитуда колебательной скорости,  $\omega$  — частота. Частотно-избирательное воздействие на распространяющиеся в резонаторе акустические волны будет осуществляться при их взаимодействии с границей  $x' = L$ , которая имеет зависящий от частоты коэффициент отражения  $R$  и кроме этого может совершать колебания сложной формы  $v_L(\omega t)$  с периодом основных колебаний. То есть в спектре колебаний границы  $x' = L$  содержатся только компоненты  $n\omega$  ( $n$  — целое число).

Процесс стабилизации профилей нелинейных волн в резонаторе можно представить следующим образом. Пусть в момент времени  $t = 0$  акустические волны начинают излучать поршень, расположенный в плоскости  $x' = 0$ . Эволюция профиля волны при ее распространении до границы  $x' = L$  описывается уравнением простой волны [4]:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — нелинейный параметр,  $c_0$  — скорость звука,  $x$  — пространственная координата в направлении распространения волны,  $\tau = t - x/c_0$  — сопровождающая координата. При отражении от границы  $x' = L$  спектральные компоненты  $\hat{v}^{(n)}$  акустической волны скачком изменятся:

$$-\hat{v}^{(n)}(x = L + 0) = R_n \hat{v}^{(n)}(z = L - 0) - \hat{v}_L^{(n)}. \quad (3)$$

Здесь  $R_n = R(n\omega)$  — коэффициент отражения  $n$ -й гармоники волны,  $\hat{v}_L^{(n)}$  — спектральные компоненты колебательной скорости границы  $x' = L$ . Отметим, что  $x$  — координата, вдоль которой отсчитывается расстояние, пройденное волной;  $x = x'$  только при  $0 < x' < L$ . Соотношение (3) справедливо для синусных и косинусных компонент колебаний по отдельности:

$$\begin{aligned} \hat{v}_s^{(n)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v(x, t) \sin n\omega t \cdot d(\omega t), \\ \hat{v}_c^{(n)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v(x, t) \cos n\omega t \cdot d(\omega t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{v}_s^{(n)}(x) \sin n\omega t + \hat{v}_c^{(n)}(x) \cos n\omega t].$$

Так как в исследуемом приближении слаболинейных волн встречные волны не взаимодействуют [4], то дальнейшее распространение волны до границы  $x'=0$  ( $x=2L$ ) описывается уравнением (2). При отражении же от этой границы, в силу (1), скачком увеличивается лишь синусная компонента основной частоты:

$$v(x=2L+0) = v(x=2L-0) + v_1 \sin \omega t. \quad (5)$$

Далее процесс повторяется.

Следовательно, в системе координат, в которой направление волны не изменяется, эволюция профиля волны описывается уравнениями

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \quad Lm < x < L(m+1), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v(x=2Lm+0) = v(x=2Lm-0) + v_1 \sin \omega t, \quad (6)$$

$$\widehat{v}^{(n)} [x = L(2m+1) + 0] = R_n \widehat{v}^{(n)} [x = L(2m+1) - 0] - \widehat{v}_L^{(n)}$$

с граничным условием  $v(x < 0) = 0$ . Последнее соотношение задачи (6) удобно, воспользовавшись определением (4), переписать в виде

$$v[x = L(2m+1) + 0] = v[x = L(2m+1) - 0] - v_L(\omega t) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (1 - R_n) \{ \widehat{v}_s^{(n)} [x = L(2m+1) - 0] \sin n\omega t +$$

$$+ \widehat{v}_c^{(n)} [x = L(2m+1) - 0] \cos n\omega t \}. \quad (7)$$

Используя свойства  $\delta$ -функции, систему уравнений (6), (7) можно свести к одному уравнению с источниками:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial \tau} = v_1 \sin \omega t \sum_{m=0}^{\infty} \delta(x - 2Lm) - \left\{ v_L(\omega t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - R_n) [\widehat{v}_s^{(n)} \sin n\omega t + \widehat{v}_c^{(n)} \cos n\omega t] \right\} \sum_{m=0}^{\infty} \delta[x - L(2m+1)]. \quad (8)$$

Вблизи линейного резонанса  $L = \pi(k + \Delta)c_0/\omega$ , где  $k$  — целое,  $|\Delta| \ll 1$ , используя периодичность функций во времени, можно сделать преобразование  $\sin \omega t \rightarrow \sin(\omega t + \pi \Delta x/L)$ ,  $v_L(\omega t) \rightarrow v_L(\omega t + \pi k + \pi \Delta x/L)$ ,  $\cos n\omega t \rightarrow (-1)^{nk} \cos n(\omega t + \pi \Delta x/L)$  и т. д. Для дальнейшего анализа удобно ввести следующие безразмерные переменные:  $v = v/v_0$ ,  $\tau = \omega t$ ,  $x = x/l$ , где  $v_0 = v_1(2l_p/L)^{1/2}$  — характерная амплитуда стационарной волны в резонаторе при идеальной неподвижной границе  $x'=L$ ;  $l_p = c_0^2/(\varepsilon\omega v_1)$  — длина образования разрыва в волне, излучаемой колебаниями стэнки  $x'=0$ ; а  $l$  — некоторое характерное расстояние, на котором существенно искажается профиль волны в резонаторе. Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{l}{l_p} \left( \frac{2l_p}{L} \right)^{1/2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = \left( \frac{L}{2l_p} \right)^{1/2} \sin \tau' \sum_{m=0}^{\infty} \delta \left( x - 2 \frac{L}{l} m \right) -$$

$$- \left\{ v_L(\tau' + \pi k) + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - R_n) [\widehat{v}_s^{(n)} \sin n\tau' + \widehat{v}_c^{(n)} \cos n\tau'] \right\} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \delta \left[ x - \frac{L}{l} (2m+1) \right], \quad (9)$$

$$\tau' \equiv \tau + \pi \Delta x / L.$$

Здесь и далее  $\hat{v}_s^{(n)}$  и  $\hat{v}_c^{(n)}$  определяются соотношениями (4), в которых произведена замена  $\omega t \rightarrow \tau$ ;  $(x, t) \rightarrow (x, \tau)$ . Если искажения волны на длине резонатора малы:

$$l \gg L, \quad (10)$$

то в правой части (9) можно от суммирования по  $m$  перейти к интегрированию по переменной  $2mL/l$  и получить следующее упрощенное уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{l}{l_p} \left( \frac{2l_p}{L} \right)^{1/2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{l}{2L} \left( \frac{L}{2l_p} \right)^{1/2} \sin \tau' - \\ - \frac{l}{2L} \left\{ v_L(\tau' + \pi k) + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - R_n) [\hat{v}_s^{(n)} \sin n\tau' + \hat{v}_c^{(n)} \cos n\tau'] \right\}. \quad (11)$$

Таким образом, при описании медленно-меняющегося на расстояниях порядка  $L$  профиля акустической волны «гребенка»  $\delta$ -источников может быть заменена источниками конечной интенсивности, непрерывно распределенными в пространстве. С физической точки зрения можно утверждать, что при выполнении условия (10) возбуждение акустических волн в резонаторе колебаниями стенок подобно генерации звука в свободном полупространстве распределенными источниками, движущимися с трансзвуковой скоростью [4, 5] (первые два члена в правой части (11)). Сравнение (11) с уравнениями работы [3, 6] показывает, что использование неидеальной границы ( $R_n \neq 1$ ) эквивалентно созданию в объеме резонатора среды с коэффициентом поглощения,  $n$ -й гармоники, равным  $\gamma_n = (1 - R_n)/2L$  (остальные слагаемые в правой части). Отметим, что уравнение (11) может быть получено более формальным математическим методом [4], однако вывод уравнения, приведенный в настоящей работе, обладает большей физической наглядностью.

В качестве примера использования развитого математического аппарата исследуем возможность повышения амплитуды первой гармоники и добротности резонатора путем селективного воздействия на вторую гармонику. Сначала изучим влияние на процессы перераспределения энергии по спектру резонансного поглощения второй гармоники. В силу уравнения (11) профиль стационарной ( $x \rightarrow \infty$ ) волны в случае  $v_L \equiv 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $R_n = 1$  при  $n \neq 2$  удовлетворяет соотношению

$$v \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{1}{4} \sin \tau + \frac{l_p}{l_n} \left( \frac{L}{2l_p} \right)^{1/2} \hat{v}_s^{(2)} \sin 2\tau. \quad (12)$$

Здесь  $l_n^{-1}$  — коэффициент поглощения второй гармоники, который может учитывать и объемное поглощение:  $l_n^{-1} = \gamma_2 + \gamma_2^V$ ,  $\gamma_2^V$  — коэффициент объемного поглощения второй гармоники [3, 6].

Решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям равенства нулю среднего значения  $v$  за период прерша [7, 8] и отсутствия ударных волн разрежения, имеет вид

$$v = \text{sign}(\tau - 2\pi p) \left| \cos \frac{\tau}{2} \right| \left( 1 + \Pi \hat{v}_s^{(2)} \sin^2 \frac{\tau}{2} \right)^{1/2}, \quad (13)$$

$$(2p-1)\pi \leq \tau \leq (2p+1)\pi, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2; \pm \dots$$

Таким образом, в выбранных нами переменных профиль волны зависит от единственного безразмерного параметра  $\Pi = 4(2l_p L / l_n^2)^{1/2}$ . Используя (4) и синус-преобразование Фурье (13), мы при  $n=2$  получаем неявную зависимость амплитуды второй гармоники  $\hat{v}^{(2)} \equiv \hat{v}_s^{(2)}$  от введенного параметра  $\Pi$ :

$$\hat{v}^{(2)} = \frac{1}{\pi (\Pi \hat{v}^{(2)})^2} \left[ \frac{(1 + \Pi \hat{v}^{(2)})^2}{(\Pi \hat{v}^{(2)})^{1/2}} \arcsin \left( \frac{\Pi \hat{v}^{(2)}}{1 + \Pi \hat{v}^{(2)}} \right)^{1/2} - \frac{5}{3} \Pi \hat{v}^{(2)} - 1 \right]. \quad (14)$$

После того как с помощью (14) найдена зависимость  $\hat{v}^{(2)} = \hat{v}^{(2)}(\Pi)$  (рис. 1), решение (13) явно описывает профили нелинейной волны

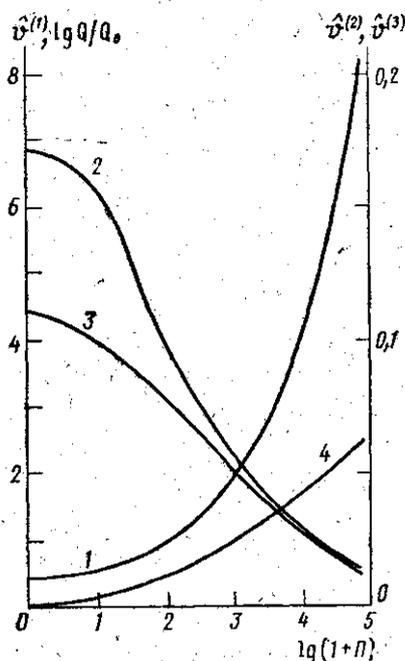


Рис. 1. Зависимости безразмерных амплитуд гармоник и добротности резонатора от параметра  $\Pi$ : 1 —  $\hat{v}^{(1)}$ , 2 —  $\hat{v}^{(2)}$ , 3 —  $\hat{v}^{(3)}$ , 4 —  $\lg Q/Q_0$ .

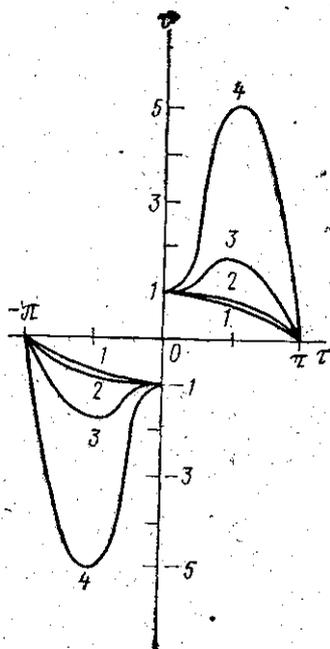


Рис. 2. Стационарные профили бегущих волн:  $\Pi = 0$  (1); 6,4 (2); 105 (3) и 2380 (4).

в среде с селективным поглощением при различных значениях параметра  $\Pi$  (рис. 2). Его спектральное разложение позволяет определить амплитуду любой частотной компоненты, например:

$$\hat{v}^{(1)} = \frac{4}{3\pi} + \frac{\Pi (\hat{v}^{(2)})^2}{2}, \quad \hat{v}^{(3)} = \hat{v}^{(2)} + \frac{5}{2\Pi} - \frac{4}{3\pi \Pi \hat{v}^{(2)}}. \quad (15)$$

На рис. 2 представлены построенные с помощью решения (14), (15) зависимости амплитуд трех первых гармоник и добротности резонатора  $Q/Q_0 (\Pi=0) = 1 + (\Pi \hat{v}^{(2)})/4$  от параметра  $\Pi$ . Таким образом, с увеличением поглощения второй гармоники амплитуда первой гармоники и добротность резонатора растут, амплитуды остальных спектральных компонент падают. В случае  $\Pi \gg 1$ :

$$v \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\Pi}{2} \right)^{1/3} \sin \tau, \quad \hat{v}^{(2)} \simeq \hat{v}^{(3)} \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\Pi}{2} \right)^{-1/3}, \quad \frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{4} \left( \frac{\Pi}{2} \right)^{2/3}. \quad (16)$$

Итак, установлено, что введение дополнительного поглощения второй гармоники хотя и открывает новый канал потерь энергии в резонаторе, вместе с тем настолько затрудняет процесс перекачки энергии вверх по спектру (где она в основном диссипирует), что в результате энергия, накапливаемая в резонаторе, возрастает.

Отметим, что полученные результаты точны, если выполняется использованное при выводе упрощенного уравнения (11) условие (10). В рассмотренной выше задаче  $l$  является характерным расстоянием, на котором может существенно исказиться при свободном распространении волна вида (13). Математически  $l$  можно оценить как длину образования разрыва в гармонической волне соответствующей амплитуды. Анализ показывает, что (10) устанавливает верхнюю границу значений параметра  $\Pi$ , при которых справедливы асимптотики (16):  $\Pi \ll (I_p/L)^{3/2}$ .

Другим приложением развитого математического аппарата может служить исследование активного гашения второй гармоники в нелинейной волне. Этого можно добиться, излучая с границы  $x=L$  вторую гармонику в противофазе ко второй гармонике, рождающейся при нелинейном искажении волны, излучаемой с границы  $x=0$ . Полагая в уравнении (11)  $x \rightarrow \infty$ ,  $R_n = 1$ ,  $v_L(\omega t) = v_2 \sin 2\omega t$ , получаем

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{4} \sin \tau + \frac{1}{2} \left( \frac{I_p}{2L} \right)^{1/2} v_2 \sin 2\tau. \quad (17)$$

Анализ уравнения (17) показывает возрастание амплитуды первой гармоники при  $v_2 > 0$ , на что указывает и некоторая математическая аналогия уравнений (12), (17). Этот процесс можно трактовать как параметрическое усиление основной гармоники в поле волны удвоенной частоты [9]. Укажем, что источники в правой части уравнения (17), в отличие от (12), не зависят от параметров волны, т. е. являются заданными. Это позволяет исследовать процесс параметрического взаимодействия акустических волн в резонаторе в нестационарных условиях, при произвольном сдвиге фаз между колебаниями границ [9].

В заключение автор выражает благодарность О. В. Руденко и участникам руководимого им семинара за полезные обсуждения этой работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Woodsum H. C. J. Sound and Vibration, 1980, 69, p. 27. [2] Moffett M. V., Mellen R. H. J. Sound and Vibration, 1981, 76, p. 295. [3] Руденко О. В. Акуст. журн., 1983, 29, с. 398. [4] Гусев В. Э. Акуст. журн., 1984, 30, с. 204. [5] Гусев В. Э. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1981, 22, № 6, с. 7. [6] Гусев В. Э. Тез. докл. X Всесоюз. акуст. конф. М., 1983, секция Б, с. 20. [7] Горьков Л. П. Инж. журн., 1963, 3, с. 236. [8] Chester W. J. Fluid Mech., 1964, 18, p. 44. [9] Гусев В. Э. Акуст. журн., 1984, 30, с. 298.

Поступила в редакцию:  
03.01.84