УДК 539.12.01

ТРИПЛЕТ ЦВЕТНЫХ ФЕРМИОНОВ В ПОЛЕ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ ЯНГА—МИЛЛСА

В. Р. Халилов, В. К. Перес-Фернандес

(кафедра теоретической физики)

1. Плосковолновые решения уравнения Янга—Миллса. Классические полевые уравнения Янга—Миллса для группы $SU(2)$ имеют вид

$$\begin{gathered}\partial^{\mu}F_{\mu\nu}{}^{a}+g\varepsilon^{abc}A^{b\mu}F_{\mu\nu}{}^{c}=0,\\ F_{\mu\nu}{}^{a}=\partial_{\mu}A_{\nu}{}^{a}-\partial_{\nu}A_{\mu}{}^{a}+g\varepsilon^{abc}A_{\mu}{}^{b}A_{\nu}{}^{c},\end{gathered}\tag{1}$$

где ε^{abc} — структурные константы группы $SU(2)$, которые в данном случае совпадают с единичным абсолютно антисимметричным тензором 3-го ранга ε^{ijk}, g — константа взаимодействия (в (1) g — константа, характеризующая самодействие), $F_{\mu\nu}{}^{a}$ — тензор напряженностей поля Янга—Миллса, являющийся аналогом тензора электромагнитного поля, $A_{\mu}{}^{a}$ — 4-потенциалы поля Янга—Миллса, $a, b, c = 1, 2, 3$ — индексы, которыми перечисляются компоненты полевых функций в изотопическом пространстве. Уравнения движения (1) нелинейны. Нетривиальные плосковолновые решения уравнений (1), являющиеся аналогами плоских электромагнитных волн, были найдены в работе [1].

В лоренцевской калибровке

$$\partial_{\mu}A^{a\mu}=0,\qquad k_{\mu}A^{a}{}_{\mu}=0$$

эти решения можно записать в виде

$$A_{\mu}^{1}=n_{\mu}f_{1}(\varphi),\ A_{\mu}^{2}=n_{\mu}f_{2}(\varphi),\ A_{\mu}^{3}=\frac{k_{\mu}}{g}\frac{d}{d\varphi}\operatorname{arctg}\frac{f_{1}}{f_{2}},\tag{2}$$

где функции $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$ являются произвольными функциями фазы $\varphi=k\cdot x$, k — произвольный постоянный изотропный 4-вектор ($k^2=0$), n — пространственно-подобный 4-вектор, ортогональный k-вектору ($k\cdot n=0$). Греческими буквами μ, ν мы перечисляем компоненты тензоров в пространстве Минковского с метрическим тензором $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

4-потенциалам (2) соответствуют напряженности поля Янга—Миллса

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}^{1,2}&=(k_{\mu}n_{\nu}-k_{\nu}n_{\mu})f_{1,2}\frac{d}{d\varphi}\ln\sqrt{f_1^2+f_2^2},\\ F_{\mu\nu}^{3}&=0.\end{aligned}\tag{3}$$

Заметим, что напряженности (3) являются нелинейными функциями потенциалов. Нетрудно показать, что тензор энергии-импульса поля Янга—Миллса имеет вид

$$T_{\mu\nu}=k_{\mu}k_{\nu}(f_1^2+f_2^2)\left[\frac{e}{d\varphi}\ln\sqrt{f_1^2+f_2^2}\right]^2=k_{\mu}k_{\nu}\Phi(\varphi),$$

причем $T_{00}>0$ существенно положительная величина, а $T_{\mu}{}^{\mu}=0$, поскольку $k^2=0$, как и должно быть для безмассового поля. Очевидно, что

$T_{\mu\nu}$ удовлетворяет условию непрерывности

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}=0,$$

так как

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}=k^\mu k_\mu k_\nu \Phi(\varphi).$$

Следовательно, $T_{\mu\nu}$ является локально сохраняющимся, поперечным в 4-мерном смысле, симметричным тензором.

В работе [2] было введено понятие ковариантно-постоянного поля. Напряженности таких полей подчинены уравнениям

$$\nabla_\rho F_{\mu\nu}{}^a=(\delta^{ab}\partial_\rho+g\varepsilon^{abc}A_\rho{}^c)F_{\mu\nu}{}^b=0. \qquad (4)$$

Ковариантно-постоянные поля Янга—Миллса являются естественным обобщением постоянных однородных электромагнитных полей, для которых условие постоянства можно записать в виде

$$\partial_\rho F_{\mu\nu}=0.$$

Существенно новое положение возникает из-за нелинейности (4). Вследствие нелинейности уравнений Янга—Миллса и уравнений (4) цветовые компоненты потенциалов зацепляются (самодействие), что, в отличие от абелева случая, приводит к расширению класса ковариантно-постоянных полей.

Действительно, рассмотрим поле (3). Чтобы удовлетворить (4), функции f_1, f_2 можно выбрать по-разному. Пусть $f_1=f_0\varphi$, $f_2=f_0\varphi$, $f_0=\mathrm{const}$. В этом случае напряженности

$$F_{\mu\nu}{}^{1,2}=(k_\mu n_\nu-k_\nu n_\mu)f_0 \qquad (5)$$

не зависят от x_μ вообще, а соответствующие поля являются постоянными однородными скрещенными цветовыми полями. Но условие ковариантного постоянства поля (3) имеет вид

$$\left[\frac{d}{d\varphi}\ln P\right]^2+\frac{d^2}{d\varphi^2}\ln P=0,$$

$$P=\sqrt{f_1^2+f_2^2},\quad \varphi=k\cdot x.$$

И, следовательно, поле (3) является ковариантно-постоянным, если

$$P=f_0\varphi,\qquad f_0=\mathrm{const}.$$

Поэтому потенциалы (2) описывают ковариантно-постоянное поле, если мы выберем

$$f_1=f_0\varphi\cos\varphi,\qquad f_2=f_0\varphi\sin\varphi.$$

В этом случае решения

$$F_{\mu\nu}{}^{1,2}=(k_\mu n_\nu-k_\nu n_\mu)f_0\{\cos\varphi,\ \sin\varphi\} \qquad (6)$$

можно трактовать как распространяющиеся со скоростью света плоские линейно-поляризованные волны, амплитуды напряженностей полей которых постоянны. Фазы этих цветовых волн сдвинуты на $\pi/2$. Заметим, что напряженности ковариантно-постоянных полей линейны по амплитуде 4-потеницала f_0. Ниже мы покажем, что действие полей (5), (6) на кварки приводит к физически эквивалентным следствиям, так как существенная часть волновой функции кварка оказывается зависящей только от комбинации $f_1^2+f_2^2$.

2. **Триплет фермионов во внешнем цветовом плосковолновом поле.** Рассмотрим триплет цветных фермионов (кварков)

$$\Psi = (\Psi^A, \Psi^B, \Psi^C)$$

во внешнем поле (2), (3). Взаимодействие между кварками в рамках теоретико-полевого подхода осуществляется через глюонное поле, которое в общем случае является восьмикомпонентным полем в цветовом пространстве (оно реализует присоединенное представление группы $SU_c(3)$). Поскольку, однако, в дальнейшем поле (2) мы считаем классическим полем, потребуем, чтобы $A_\mu{}^a=0$ при $a=4, 5, 6, 7, 8$.

Уравнения движения кварков во внешнем цветовом поле имеют вид [3]:

$$i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \frac{ig}{2}A^a_\mu\lambda^a\right)\Psi - m\Psi = 0, \tag{7}$$

где γ^μ — трехблочные матрицы Дирака, λ^a — матрицы Гелл-Манна. Подставляя в (7) потенциалы (2), видим, что на компоненту ψ^C поле (2) не действует, и ψ^C описывается свободным уравнением Дирака. Далее предполагая, что $\sqrt{f_1^2+f_2^2}\neq 0$, и вводя $\theta=\operatorname{arctg}(f_2/f_1)$, нетрудно показать, что система уравнений для компонент Ψ^A, Ψ^B оказывается согласованной, если Ψ^A, Ψ^B связаны между собой фазовым множителем

$$\Psi^A = e^{-i\theta}\Psi^B.$$

При этом уравнение движения кварка оказывается эквивалентным уравнению Дирака для электрона в поле плоской электромагнитной волны:

$$\left(\hat\partial - \frac{ig}{2}\hat A\right)\Psi - m\Psi = 0, \tag{8}$$

где

$$A_\mu = -\frac{k_\mu}{g}f_3 + n_\mu\sqrt{f_1^2+f_2^2}.$$

Решение уравнения (8) можно выписать сразу, используя результаты работы [4]:

$$\Psi = \left[1 - \frac{g}{4(p\cdot k)}\hat k\hat A\right]\frac{u}{\sqrt{2p_0}}e^{iS},$$

$$S = -(p\cdot x) + \frac{g}{2(p\cdot k)}\int\left[(p\cdot A) + \frac{g}{4}(A\cdot A)\right]d\varphi,$$

причем биспинор u удовлетворяет уравнению

$$(\hat p - m)u = 0.$$

В явном виде для Ψ^A, Ψ^B имеем

$$\Psi^A = Q\exp\left\{i\widetilde S + \frac{i}{2}\int f_3 d\varphi\right\},$$

$$\Psi^B = Q\exp\left\{i\widetilde S - \frac{i}{2}\int f_3 d\varphi\right\},$$

где

$$Q = \left[1 + \frac{g\sqrt{f_1^2+f_2^2}}{4(p\cdot k)}\hat n\hat k\right]\frac{u}{\sqrt{2p_0}},$$

$$\tilde{S} = -(p\cdot x) + \frac{ig}{2(p\cdot k)}\int\left[(p\cdot n) - \frac{g}{4}\sqrt{f_1^2+f_2^2}\right]\sqrt{f_1^2+f_2^2}\,d\varphi.$$

Действие оператора $i\partial_\mu + \frac{g}{2}\lambda^a A_\mu^a$, играющего в данном случае роль оператора кинетического импульса, на кварковые состояния Ψ определяется следующим образом:

$$\left(i\partial_\mu + \frac{g}{2}A_\mu^a\lambda^a\right)\Psi^{A,B} = \left[\pi_\mu + \frac{igk_\mu}{4(p\cdot k)}(\sigma\cdot F)\right]\Psi^{A,B}, \tag{9}$$

где

$$\pi_\mu = p_\mu - \frac{g}{2(p\cdot k)}k_\mu\left[(p\cdot n) - \frac{g}{4}\sqrt{f_1^2+f_2^2}\right]\sqrt{f_1^2+f_2^2} + \frac{g}{2}n_\mu\sqrt{f_1^2+f_2^2},$$

$$\sigma \equiv \sigma^{\rho\beta} = \frac{1}{2}(\gamma^\rho\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\rho),\ \rho < \beta,$$

$$F \equiv F_{\rho\beta} = \frac{k_\beta n_\rho - k_\rho n_\beta}{2}\sqrt{f_1^2+f_2^2}\,\frac{d}{d\varphi}\ln\sqrt{f_1^2+f_2^2}.$$

Второй член в правой части (9) характеризует взаимодействие спина кварка с цветовым полем. Мы видим, что эффективно спин кварка взаимодействует с бесцветным полем, пропорциональным $\sqrt{f_1^2+f_2^2}$.

Плотность тензора энергии-импульса кваркового поля $T_{\mu\nu}(x)$ записывается в виде, аналогичном выражению для плотности тензора энергии-импульса электрона в поле электромагнитной волны:

$$T_{\mu\nu}(x) = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi\pi_\nu + \frac{ig}{2(p\cdot k)}k_\nu\bar{\Psi}\gamma^5\gamma^\lambda\Psi F^*_{\lambda\mu},$$

где

$$F^*_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}F^{\nu\rho} \text{ — тензор, дуальный } F_{\lambda\mu}.$$

Подобным образом определяется 4-псевдовектор спина кварка s_λ (s_λ не является интегралом движения):

$$i\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_\lambda\Psi = s_\lambda\bar{\Psi}\Psi.$$

Движение спина кварка в поле цветовой волны можно определить, вычисляя элемент $\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_\lambda\Psi$ и вводя сохраняющийся 4-псевдовектор s_0 для состояния u:

$$s_\lambda = s_{0\lambda} + \frac{g}{2(p\cdot k)}[B_\lambda(k\cdot s_0) - k_\lambda(B\cdot s_0)] - \frac{g^2(B\cdot B)}{8(p\cdot k)^2}(s_0\cdot k)k_\lambda,$$

где

$$B_\lambda = n_\lambda\sqrt{f_1^2+f_2^2}.$$

В заключение заметим, что дальнейшую классификацию состояний кварка в поле (3) можно дать по аналогии с классификацией состояний электрона в поле электромагнитной волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Coleman S. Phys. Lett., 1977, 70 B, N 1, p. 59. [2] Баталин И. А., Матинян С. Г., Саввиди Г. К. Ядерная физика, 1977, 26, с. 407. [3] Андреев И. В. Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях. М.: Наука, 1981. [4] Ритус В. И. В кн.: Тр. ФИАН. Т. 111. М.: Наука, 1979, с. 5—151.

Поступила в редакцию
04.01.84