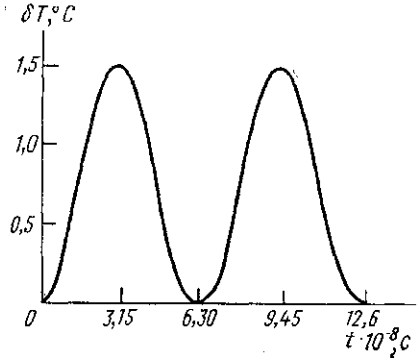
Анализ температурного поля в рассматриваемый момент времени сводится к решению уравнения теплопроводности

$$T_t = a^2 T_{xx} + \frac{1}{c_p \rho} \Delta H(t), \tag{8}$$



с начальным условием $T(x, 0) = 0$ и граничными условиями $T(0, t) = 0$, $T(l, t) = 0$. Положим $a^2 = 0{,}006$ см²/с, $c_p = 1{,}20 \cdot 10^7$ эрг/(г·град), $\rho = 4{,}0$ г/см³, $l = 500$ км, $t_p = 10$ лет.

Уравнение (8) можно решить численным способом, методом прогонки с помощью ЭВМ. Результаты расчетов представлены на рисунке. Как следует из рисунка, при сделанных предположениях амплитуда температурных колебаний достигает критической величины, что делает вероятным разделение оболочки земного шара на минералогические фракции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Авдулов М. В. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1981, 22, № 3, с. 9. [2] Авдулов М. В. В кн.: Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками. М.: Наука, 1981, с. 29. [3] Маракушев А. А. Петрология метаморфических горных пород. М.: Изд-во МГУ, 1973.

Поступила в редакцию
07.02.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, т. 26, № 1

УДК 519.632:537.312.62

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ТЕОРИИ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ

П. Н. Вабищевич, С. А. Васенко, В. К. Семенов

(кафедра физики колебаний)

1. Теоретическое исследование распределенных джозефсоновских переходов базируется в основном на численном интегрировании уравнений типа синус-Гордон (см., например, [1]). С другой стороны, в работах [2, 3] развит асимптотический подход к изучению больших джозефсоновских переходов, основанный на описании усредненных характеристик вихревой структуры. В этом случае математическая модель сводится к задаче со свободной (неизвестной) границей для квазилинейного эллиптического уравнения на плоскости, что позволяет построить более эффективные вычислительные алгоритмы по сравнению с решением задачи для уравнений типа синус-Гордон.

Численные методы решения стационарных задач со свободной границей строятся главным образом на основе метода штрафа [4]. В работе [5] предложен эффективный вычислительный алгоритм, реализующий метод штрафа, с использованием одного из наиболее быстрых итерационных методов решения эллиптических задач — попеременно-треугольного метода Самарского. В данной работе для решения задач со свободной границей в теории джозефсоновских перехо-

дов развивается численный метод, построенный на основе метода переменных направлений.

2. На плоскости (x, y) рассмотрим прямоугольник $\mathscr{D}=\{(x, y)\,|\,0<x<a,\ 0<y<b\}$. Некоторая область Ω является частью $\mathscr{D}$, причем ее граница $\partial\Omega=\Gamma^{+}+\Gamma^{-}$, где Γ^{+} — общая с частью границы прямоугольника $\partial\mathscr{D}$, а Γ^{-} — неизвестная часть границы, целиком лежащая в $\mathscr{D}$. В Ω ищется функция $u(x, y)$, удовлетворяющая уравнению [3],

$$Lu\equiv\operatorname{div}\varphi(|\nabla u|)\operatorname{grad}u=0,\quad (x,\ y)\in\Omega. \tag{1}$$

В (1) заданная функция $\varphi(t)$ определяется равенствами

$$\varphi(t)=\frac{4}{\pi st}E(s),\quad t=\frac{\pi}{sK(s)},$$

где $K(s)$, $E(s)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

На Γ^{+} задано нелинейное краевое условие второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{f(x, y)}{\varphi(|\nabla u|)},\quad (x, y)\in\Gamma^{+}, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя по отношению к Ω нормаль, а $f(x, y)\leqslant 0$. На неизвестной границе Γ^{-} выполнены условия

$$u(x, y)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial n}(x, y)=0,\quad (x, y)\in\Gamma^{-}. \tag{3}$$

3. Для решения задачи (1)—(3) применим метод штрафа [4, 5]. Приближенное решение $u_\sigma(x, y)$ задачи (1)—(3) определяется как решение следующей задачи во всем прямоугольнике $\mathscr{D}$:

$$Lu_\sigma-c_\sigma(u_\sigma)u_\sigma=\mathscr{F}_\sigma(u_\sigma),\quad (x,\ y)\in\mathscr{D}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_\sigma}{\partial n}(x, y)=f_\sigma(x, y)/\varphi(|\nabla u_\sigma|),\quad (x, y)\in\partial\mathscr{D}. \tag{5}$$

Здесь σ — достаточно малый параметр,

$$c_\sigma(u_\sigma)=\begin{cases}0, & u_\sigma\leqslant 0,\\ \sigma^{-2} & u_\sigma>0,\end{cases}$$

$$\mathscr{F}_\sigma(u_\sigma)=\begin{cases}0, & u_\sigma\leqslant 0,\\ -1, & u_\sigma>0,\end{cases}$$

$$f_\sigma(x, y)=\begin{cases}f(x, y), & (x, y)\in\Gamma^{+},\\ 0, & (x, y)\in\partial\mathscr{D}\setminus\Gamma^{+}.\end{cases}$$

При $\sigma\to 0$ $u_\sigma(x, y)\to u(x, y)$ в Ω, а линия $u_\sigma(x, y)=0$ приближенно определяет неизвестную границу Γ^{-}.

4. Для решения нелинейной краевой задачи (4), (5) используем хорошо развитые разностные методы, применяя двухступенчатый итерационный процесс [6]. На внешнем итерационном цикле применяется метод типа Ньютона—Канторовича, внутренние итерации проводятся на основе метода переменных направлений. Особенности применения метода переменных направлений в задачах с разрывным коэффициентом $c_\sigma(u_\sigma)$ проиллюстрируем на примере простейшей линейной задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-c(x, y)=\mathscr{F}(x, y),\quad (x, y)\in\mathscr{D}, \tag{6}$$

$$u(x, y)=0, \ (x, y)\in\partial\mathscr{D}, \tag{7}$$

где $0\leqslant c(x, y)\leqslant d=\text{const}$, а d — достаточно большое число. В задачах со свободной границей типа (4), (5) $d=\sigma^{-2}$.

Проблема состоит в построении итерационного метода решения задачи (6), (7), сходимость которого не зависела бы от величины d. На сетке

$$\overline{\omega}_h=\omega_h+\gamma_h=\{(x_i, y_j)=(ih_1, jh_2), \ i=0, 1, ..., N_1, \ N_1h_1=a, \ j=0, 1, ..., N_2, \ N_2h_2=b\}$$

поставим в соответствие (6), (7) обычным образом [6, 7] разностную задачу. На пятиточечном шаблоне имеем во внутренних узлах

$$(\Lambda_1+\Lambda_2)v-c(x, y)v=\mathscr{F}, \ (x, y)\in\omega_h, \tag{8}$$

а на границе

$$v(x, y)=0, \ (x, y)\in\gamma_h. \tag{9}$$

В стандартных безындексных обозначениях [7]

$$\Lambda_1v=v_{\bar{x}x}, \ \Lambda_2v=v_{\bar{y}y}, \ (x, y)\in\omega_h.$$

Для операторов Λ_α, $\alpha=1, 2$, справедливы неравенства

$$\delta_\alpha{}^0E\leqslant-\Lambda_\alpha\leqslant\Delta_\alpha{}^0E,$$

где

$$\delta_\alpha^0=\frac{4}{h_\alpha^2}\sin^2\frac{\pi}{2N_\alpha}, \quad \Delta_\alpha^0=\frac{4}{h_\alpha^2}\cos^2\frac{\pi}{2N_\alpha}, \quad \alpha=1,2,$$

а E — единичный сеточный оператор.

Схема переменных направлений для задачи (8), (9) записывается в виде

$$\frac{v^{n+1/2}-v^n}{\omega_1}+A_1v^{n+1/2}+A_2v^n=\mathscr{F}, \tag{10}$$

$$\frac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{\omega_2}+A_1v^{n+1/2}+A_2v^{n+1}=\mathscr{F}. \tag{11}$$

В нашем случае

$$A_1=-\Lambda_1+\beta c(x, y)E, \tag{12}$$

$$A_2=-\Lambda_2+(1-\beta)c(x, y)E, \tag{13}$$

где $\beta\in[0, 1]$ — числовой параметр. Для границ спектра положительных самосопряженных операторов A_α, $\alpha=1, 2$, введем обозначения

$$\delta_\alpha E\leqslant A_\alpha\leqslant\Delta_\alpha E,$$

причем с учетом (12), (13) получим

$$\delta_\alpha=\delta_\alpha{}^0, \ \Delta_1=\Delta_1{}^0+\beta d, \ \Delta_2=\Delta_2{}^0+(1-\beta)d.$$

Задача выбора оптимальных значений параметров ω_1, ω_2 метода переменных направлений (10), (11) для неперестановочных операторов решена в работах [6, 7]. Установлено, что для числа итераций $n(\varepsilon)$, необходимых для достижения заданной точности, верна оценка

$$n\geqslant n_0(\varepsilon)=\frac{1}{4\sqrt{\eta}}\ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Здесь

$$\eta = \frac{1-p}{1+p}, \quad p^2 = \frac{(\Delta_1-\delta_1)(\Delta_2-\delta_2)}{(\Delta_1+\delta_2)(\Delta_2+\delta_1)}. \tag{15}$$

Наибольшая скорость сходимости (10), (11) достигается при максимальном значении параметра η, т. е. при минимальном значении $0<p<1$. Имеем в нашем случае

$$p(\beta) = \sqrt{\frac{\Delta_1^0-\delta_1^0+\beta d}{\Delta_1^0+\delta_2^0+\beta d}}\sqrt{\frac{\Delta_2^0-\delta_2^0+(1-\beta)d}{\Delta_2^0+\delta_1^0+(1-\beta)d}}.$$

Отсюда вытекает

$$\lim_{d\to\infty} p(\beta) = \begin{cases} 1, & 0<\beta<1, \\ \sqrt{\dfrac{\Delta_1^0-\delta_1^0}{\Delta_1^0+\delta_2^0}}, & \beta=0, \\ \sqrt{\dfrac{\Delta_2^0-\delta_2^0}{\Delta_2^0+\delta_1^0}}, & \beta=1. \end{cases}$$

Это позволяет сформулировать основной вывод: при решении задач с большим d необходимо брать либо $\beta=0$, либо $\beta=1$. При использовании промежуточных значений β скорость сходимости (10), (11) будет зависеть от параметра d. Если

$$\frac{\Delta_1^0-\delta_1^0}{\Delta_1^0+\delta_2^0} > \frac{\Delta_2^0-\delta_2^0}{\Delta_2^0+\delta_1^0},$$

то $\beta=1$, в противоположном случае $\beta=0$. При таком выборе параметра β

$$p \leqslant p_0 = \min\left\{\sqrt{\frac{\Delta_1^0-\delta_1^0}{\Delta_1^0+\delta_2^0}}, \quad \sqrt{\frac{\Delta_2^0-\delta_2^0}{\Delta_2^0+\delta_1^0}}\right\}.$$

Использование этой оценки в (14), (15) показывает, что для достижения одной и той же точности в схеме (10), (11) при оптимальном выборе параметра β ($\beta=0$ или $\beta=1$) необходимо затратить не более чем в $\sqrt{2}$ раз больше итераций по сравнению со случаем $d=0$ ($c(x, y)\equiv 0$). Подчеркнем, что такое утверждение справедливо при любом коэффициенте $c(x, y)\geqslant 0$.

Аналогично строится стационарный итерационный метод переменных направлений, когда в (10), (11) $\omega_1=\omega_2=\tau$. В этом случае оптимальное значение β также либо 0, либо 1.

Обозначим через z^{n+1} невязку на $n+1$ итерации, т. е. $z^{n+1}=v^{n+1}-v$. Для сеточной функции $r^{n+1}=(E+\tau A_2)z^{n+1}$ справедливо [6, 7] представление

$$r^{n+1}=S_1\cdot S_2 r^n, \quad n=0, 1, \ldots,$$

где $S_\alpha=(E+\tau A_\alpha)^{-1}(E-\tau A_\alpha)$, $\alpha=1, 2$.

Выберем τ из условия минимума нормы оператора перехода $S=S_1S_2$. В силу условия $\|S\|\leqslant\|S_1\|\cdot\|S_2\|$ задача сводится к оценке $\|S_\alpha\|$, $\alpha=1, 2$. Известно [6, 7], что минимум $\|S_\alpha\|$, равный $(1-\sqrt{\eta_\alpha})/(1+\sqrt{\eta_\alpha})$, где $\eta_\alpha=\delta_\alpha/\Delta_\alpha$, достигается при $\tau=\tau_0=2/\sqrt{\delta_\alpha\Delta_\alpha}$. Рассуждения, аналогичные случаю $\omega_1\neq\omega_2$, приводят к тому, что при боль-

ших α оптимальные значения β равны либо 0, либо 1. При $\eta_2 \leqslant \eta_1$ выберем $\beta=0$ и $\tau=2/\sqrt{\delta_1^0\Delta_1^0}$, при $\eta_2>\eta_1$ возьмем $\beta=1$ и $\tau=2/\sqrt{\delta_2^0\Delta_2^0}$. Аналогично устанавливается, что в стационарном варианте метода переменных направлений число итераций возрастает не более чем в 2 раза при указанных выборах параметров β и τ.

5. Описанный выше вычислительный алгоритм тестировался на модельных задачах и использовался для конкретных расчетов двумерных распределенных джозефсоновских переходов [3]. Приведем результаты сравнения численного решения с точным в том случае, когда граничная задача (1)—(3) обладает аксиальной симметрией и ее аналитическое решение известно [3]. Пусть ось симметрии проходит через вершину (0, 0) прямоугольника $\mathscr{D}$, т. е. область Ω (домен) представляет собой четверть круга с центром в этой вершине. При этом решение задачи (1)—(3) имеет вид

$$u(r) = \pi r_0 \int_1^{\gamma} \frac{ds}{sE^2(s)}.$$

Здесь $r^2=x^2+y^2$, $r/r_0=\gamma/E(\gamma)$. Параметр r_0 зависит от величины потока вектора ∇u на границе Γ^+ и определяет радиус домена $(u(r_0)=0)$.

x	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$-u_h$	2,460	1,460	1,006	0,739	0,553	0,410	0,295	0,200	0,120	0,054	0,000
$-u$	∞	1,426	0,982	0,725	0,543	0,403	0,288	0,193	0,114	0,048	0,000

В таблице для сравнения приведены значения точного решения u и разностного u_h, полученного на сетке с $N_1=N_2=20$ в узловых точках x при $y=0$. Несмотря на особенность $u(r)$ при $r\to 0$, разностное решение дает хорошее приближение к точному решению и достаточно точно определяет границу домена (в данном примере радиус домена $r_0=0{,}5$).

Рассмотренный аксиально-симметричный домен формируется в джозефсоновском переходе только в том случае, когда инжекция тока осуществляется точно в угол перехода. При этом линейная плотность инжектируемого тока $f(x, y)$ (см. условие (2)) отлична от нуля лишь в начале координат (0, 0). В реальных условиях плотность втекающих в переход токов распределена по всей его границе и существенно зависит от геометрии перехода. В работе [1] с помощью моделирования в электролитической ванне было найдено истинное распределение $f(x, y)$ для перехода квадратной формы, образованного в области перекрытия двух тонкопленочных полосок. Описанный выше алгоритм применялся для решения задачи (1)—(3) в случае этой конкретной геометрии с учетом реальной инжекции тока в переход [3]. Результаты решения хорошо согласуются с экспериментом [1].

Пользуясь случаем, авторы выражают глубокую благодарность К. К. Лихареву за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Barone A. et al. J. Appl. Phys., 1982, 53, p. 5802. [2] Васенко С. А., Лихарев К. К., Семенов В. К. ЖЭТФ, 1981, 81, с. 1444. [3] Вабищевич П. Н. и др. ЖЭТФ, 1984, 86, с. 1132. [4] Гловински Р., Лионс Ж.-Л.,

Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. [5] Вабищевич П. Н. ЖВМ и МФ, 1982, 22, с. 1109. [6] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. [7] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию
07.02.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, т. 26, № 1

УДК 530.12:539.1.01

КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА И ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФЕРМИОНОВ С КРУЧЕНИЕМ

А. А. Гвоздев, П. И. Пронин

(кафедра теоретической физики)

1. **Введение.** Последовательное включение гравитации в единую схему теории фундаментальных физических взаимодействий (на основе калибровочного подхода) с необходимостью приводит к выходу за рамки эйнштейновской теории относительности [1]. Калибровочная трактовка гравитационного поля в первую очередь приводит к расширению ОТО на теорию гравитации с кручением.

Как и общая теория относительности, теория гравитации с кручением может быть построена непосредственно исходя из принципов относительности и эквивалентности. В этой теории независимыми динамическими величинами, характеризующими гравитационное поле, будут метрика $g_{\mu\nu}(x)$ и кручение $Q^{\lambda}_{\mu\nu}$, равное антисимметричной части $Q^{\lambda}_{\mu\nu} = (\Gamma^{k}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu})/2$. Источником поля кручения является спин элементарных частиц, который вместе с тензором энергии-импульса — источником эйнштейновского гравитационного поля — исчерпывает набор пространственно-временных характеристик последних [2].

До настоящего времени в работах по теории гравитации с кручением в качестве источника поля кручения рассматривалась в основном так называемая спиновая жидкость Вейсенхоффа—Раабе [3], каждой частице которой приписывался собственный угловой момент [2, 4], который никакого отношения к спину элементарных частиц не имел. А именно последний и должен быть, согласно калибровочной теории гравитации, источником поля кручения. Однако спин элементарных частиц имеет чисто квантовую природу. В то же время кручение с точки зрения геометризации гравитационного поля — характеристика многообразия U_4. Возникает вполне закономерный вопрос: каким образом непротиворечиво записать и разрешить уравнения поля в теории гравитации с кручением, чтобы последовательно реализовать идею геометризации гравитационного взаимодействия и учесть квантовую природу спина элементарных частиц? Ответ на этот вопрос был частично дан в работе [5].

В данной работе мы на примере ближайшего обобщения эйнштейновской теории — теории Эйнштейна—Картана, ограничиваясь случаем только спиновых источников поля кручения, исследуем конечнотемпературные эффекты взаимодействия кручения с фермионами.

2. **Взаимодействие гравитационного поля с фермионами в теории Эйнштейна—Картана.** Наиболее общий лагранжиан, описывающий взаимодействие гравитационного и безмассового фермионного полей в рамках теории гравитации с кручением, будет

$$L_0 = -\frac{1}{16\pi G} R(g, Q) + \alpha Q_{\mu\nu\alpha} Q^{\mu\nu\alpha} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\nu}\nabla_{\nu}\psi - \nabla_{\nu}\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi), \qquad (1)$$