Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. [5] Вабищевич П. Н. ЖВМ и МФ, 1982, 22, с. 1109. [6] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. [7] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию
07.02.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, т. 26, № 1

УДК 530.12:539.1.01

КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА И ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФЕРМИОНОВ С КРУЧЕНИЕМ

А. А. Гвоздев, П. И. Пронин

(кафедра теоретической физики)

1. **Введение.** Последовательное включение гравитации в единую схему теории фундаментальных физических взаимодействий (на основе калибровочного подхода) с необходимостью приводит к выходу за рамки эйнштейновской теории относительности [1]. Калибровочная трактовка гравитационного поля в первую очередь приводит к расширению ОТО на теорию гравитации с кручением.

Как и общая теория относительности, теория гравитации с кручением может быть построена непосредственно исходя из принципов относительности и эквивалентности. В этой теории независимыми динамическими величинами, характеризующими гравитационное поле, будут метрика $g_{\mu\nu}(x)$ и кручение $Q^{\lambda}_{\mu\nu}$, равное антисимметричной части $Q^{\lambda}_{\mu\nu} = (\Gamma^{k}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu})/2$. Источником поля кручения является спин элементарных частиц, который вместе с тензором энергии-импульса — источником эйнштейновского гравитационного поля — исчерпывает набор пространственно-временных характеристик последних [2].

До настоящего времени в работах по теории гравитации с кручением в качестве источника поля кручения рассматривалась в основном так называемая спиновая жидкость Вейсенхоффа—Раабе [3], каждой частице которой приписывался собственный угловой момент [2, 4], который никакого отношения к спину элементарных частиц не имел. А именно последний и должен быть, согласно калибровочной теории гравитации, источником поля кручения. Однако спин элементарных частиц имеет чисто квантовую природу. В то же время кручение с точки зрения геометризации гравитационного поля — характеристика многообразия U_4. Возникает вполне закономерный вопрос: каким образом непротиворечиво записать и разрешить уравнения поля в теории гравитации с кручением, чтобы последовательно реализовать идею геометризации гравитационного взаимодействия и учесть квантовую природу спина элементарных частиц? Ответ на этот вопрос был частично дан в работе [5].

В данной работе мы на примере ближайшего обобщения эйнштейновской теории — теории Эйнштейна—Картана, ограничиваясь случаем только спиновых источников поля кручения, исследуем конечнотемпературные эффекты взаимодействия кручения с фермионами.

2. **Взаимодействие гравитационного поля с фермионами в теории Эйнштейна—Картана.** Наиболее общий лагранжиан, описывающий взаимодействие гравитационного и безмассового фермионного полей в рамках теории гравитации с кручением, будет

$$L_0 = -\frac{1}{16\pi G} R(g, Q) + \alpha Q_{\mu\nu\alpha} Q^{\mu\nu\alpha} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\nu}\nabla_{\nu}\psi - \nabla_{\nu}\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi), \qquad (1)$$

где $R(g, Q)=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(g, Q)$, $R_{\mu\nu}(g, Q)=2\Gamma^{\lambda}_{\mu[\nu,\lambda]}+2\Gamma^{\lambda}_{\mu[\nu}\Gamma^{\sigma}_{|\lambda|\sigma]}$ — скаляр кривизны пространства Римана—Картана U_4, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\{^{\lambda}_{\mu\nu}\}+K^{\lambda}_{\mu\nu}$ — коэффициенты связности U_4, $\nabla_\mu=\partial_\mu-\frac{i}{4}(\omega_{ab\mu}+K_{ab\mu})\sigma^{ab}$, $\omega_{ab\mu}$ — коэффициенты вращения Риччи, $\sigma^{ab}=\frac{i}{2}[\gamma^a, \gamma^b]$, $K^{\lambda}_{\mu\nu}=Q^{\lambda}_{\mu\nu}+2Q_{(\mu\nu)}^{\lambda}$ — тензор кручения, G — ньютоновская гравитационная постоянная, α — произвольная константа, $\hbar=c=1$.

Проварьировав L_0 по кручению, мы получим уравнение, связывающее спин и кручение:

$$Q_{\mu\nu\alpha}\left(2\alpha+\frac{1}{8\pi G}\right)=\frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha]}\psi. \tag{2}$$

Из этого уравнения видно, что только полностью антисимметричные компоненты тензора кручения отличны от нуля. Учитывая, что

$$\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha]}=\varepsilon^{\mu\nu\alpha\lambda}\gamma_\lambda\gamma_5,$$

и вводя в рассмотрение псевдовектор кручения $\breve{Q}_\mu=\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}Q^{\nu\alpha\beta}$, перепишем (1) с учетом (2) в следующем виде:

$$L_1=-\frac{1}{16\pi G}R(g)-\frac{m_0^2}{2}\breve{Q}_\mu\breve{Q}^\mu+i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi, \tag{3}$$

где

$$D_\mu=\partial_\mu-\frac{i}{4}\omega_{ab\mu}\sigma^{ab}+g_0\gamma_5\breve{Q}_\mu,\ \frac{m_0^2}{g_0^2}=\left(\alpha+\frac{1}{16\pi G}\right).$$

Полученный результат свидетельствует, что спин фермионного поля является источником псевдовектора кручения; при этом он взаимодействует только с полностью антисимметричными компонентами кручения.

3. **Статистическая природа поля кручения.** Уравнение (2) выражает основную идею теории гравитации с кручением о спине как источнике гравитационного поля. Однако это уравнение следует рассматривать как формальное операторное соотношение, отражающее наличие спин-спинового гравитационного взаимодействия, в силу приведенных во введении соображений. Покажем, как из этого соотношения найти геометрическое поле кручения.

Для этого есть два пути. Первый: считая спинорные функции операторами, действующими в пространстве состояний, можно усреднить выражение (2) по вакууму. Конечные значения получаются с помощью регуляризации расходящихся интегралов посредством раздвижки аргументов. В этом случае классическое поле кручения будет следующим:

$$\breve{Q}_\mu=i\frac{m_0^2}{2g_0^2}\lim_{\delta\to 0}\mathrm{Tr}<|\bar{\psi}(x-\delta)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x+\delta)+\bar{\psi}(x+\delta)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x-\delta)|>.$$

Однако такой подход не является самосогласованным, поскольку здесь не учитывается влияние возникающего $\breve{Q}_\mu$ на движение фермионов и поляризацию вакуума спинорного поля. Рассмотрим второй подход. Идея этого метода впервые была предложена в работах Хартри и Фока и в дальнейшем разрабатывалась рядом авторов [6, 7], приняв окончательную релятивистскую форму в [8]. В этом случае поле кру-

чения будет средним полем, возникающим как непертурбативный фон в результате взаимодействия многих частиц.

Исходя из лагранжиана взаимодействия поля кручения с безмассовым фермионным (3), запишем производящий функционал связных функций Грина спинорного и торсионного полей в фоновой метрике:

$$Z(\bar{\eta}, \eta, J) = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\breve{Q} \exp\{i \int d^4x \sqrt{-g}\,(L_1 + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \breve{Q}_\mu J^\mu)\}. \qquad (4)$$

Проинтегрировав по ферми-полям, получим следующее выражение для эффективного потенциала поля кручения:

$$V = -i\,\mathrm{Tr}\ln(\sqrt{-g}\, i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu) + \sqrt{-g}\,\frac{m_0^2}{2}\breve{Q}_\mu \breve{Q}^\mu. \qquad (5)$$

Среднее поле кручения есть самосогласованное решение уравнения, получаемого варьированием V по $\breve{Q}_\mu$:

$$\left.\frac{\delta V}{\delta \breve{Q}_\mu}\right|_{\breve{Q}_\mu = \langle \breve{Q}_\mu \rangle} = 0 \quad (6а), \qquad \left.\frac{\delta^2 V}{\delta \breve{Q}_\mu \delta \breve{Q}_\nu}\right|_{\breve{Q}_\alpha = \langle \breve{Q}_\alpha \rangle} > 0. \quad (6б)$$

Решение уравнения (6а), подчиняющееся условию (6б), минимизирует эффективный потенциал, и оно равно вакуумному среднему от торсионного поля:

$$\langle Q_\alpha \rangle = \langle |\breve{Q}_\alpha| \rangle = \frac{\delta \ln Z(\bar{\eta}, \eta, J)}{\delta J_\alpha}.$$

Уравнение (6а) аналогично уравнению щели в теории сверхпроводимости [9]. В теории взаимодействующих полей решения подобных уравнений описывают конденсат связанных состояний из фермионов [8]. Таким образом, трактовка поля кручения как среднего поля, минимизирующего эффективный потенциал (5), приводит к выводу о двойственной природе кручения, которое, с одной стороны, есть геометрическая величина, характеризующая многообразие U_4, с другой — вещественный конденсат фермионных пар.

4. Среднее поле кручения при конечной температуре. Рассмотрим образование среднего поля кручения при конечной температуре. Для простоты ограничимся случаем пространства-времени с псевдоевклидовой метрикой $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Тогда в лагранжиане L_1 необходимо положить $D_\mu = \partial_\mu + g_0\gamma_5\breve{Q}_\mu$ и $\sqrt{-g} = 1$. После чего совершим стандартный переход к евклидовой теории поля при конечной температуре [10], сделав в производящем функционале (4) следующие замены:

$$t \to i\tau, \quad \gamma^0 \to \gamma^0, \quad \gamma \to i\gamma_E, \quad i\int d^4x \to -\int_0^\beta d\tau \int d^3x, \quad \beta^{-1} = T.$$

Проинтегрировав такой евклидов производящий функционал по ферми-полям, мы получим большой термодинамический потенциал

$$\Omega(J) = V_\beta'(\breve{Q}) - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \breve{Q}_\mu J^\mu,$$

который при равных нулю внешних источниках совпадает с эффективным потенциалом поля кручения при конечной температуре. Знание этого потенциала позволит нам выразить среднее поле кручения через макроскопические термодинамические параметры задачи — температуру, плотность числа частиц, давление и т. п.

В процессе вычисления эффективного потенциала возникает необходимость регуляризации расходящихся интегралов и термодинамического усреднения, поэтому для удобства вычислений представим эффективный потенциал в виде суммы

$$V_\beta(\breve{Q}) = V_0(\breve{Q}) + \tilde{V}(\breve{Q}),$$

где

$$V_0(\breve{Q}) = -i\,\mathrm{Tr}\ln\left(i\gamma^\mu(\partial_\mu + g_0\gamma_5\breve{Q}_\mu)\right) + \frac{m_0^2}{2}\breve{Q}_\mu\breve{Q}^\mu \tag{7}$$

— вклад в эффективный потенциал при нулевой температуре, а

$$\tilde{V}(\breve{Q}) = -\frac{1}{(2\pi)^3\beta}\sum_n\int d^3k\,\mathrm{Tr}\ln\left(i\omega_n\gamma_0 - i\mathbf{k}\boldsymbol{\gamma}_E - g_0(\gamma_0\breve{Q}_0 - i\boldsymbol{\gamma}_E\breve{\mathbf{Q}})\gamma_5\right) \tag{8}$$

— конечнотемпературная часть; $\omega_n = (\pi/\beta)(2n+1)$ — мацубаровские частоты.

Среднее поле кручения также представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\langle\breve{Q}_\mu^{(\beta)}\rangle = \langle\breve{Q}_\mu(0)\rangle + \langle\breve{Q}_\mu(T)\rangle,$$

здесь $\langle\breve{Q}_\mu(0)\rangle$ — среднее поле при нулевой температуре (полевая величина без учета квантовой статистики) удовлетворяет уравнениям (6) в импульсном представлении:

$$\langle\breve{Q}_\mu(0)\rangle = \frac{m_0^2}{(2\pi)^4 g_0^2}\,\mathrm{Tr}\int d^4k\,\frac{1}{\gamma^\mu(k_\mu + g_0\gamma_5\langle\breve{Q}_\mu(0)\rangle)}, \tag{9}$$

а $\langle\breve{Q}_\mu(T)\rangle$ удовлетворяет уравнению, получаемому варьированием (8) по $Q_\mu^{(\beta)}$. Для удобства введем обозначения

$$\mu_0 = g_0\langle Q_0(T)\rangle,\ \boldsymbol{\mu} = g_0\langle\mathbf{Q}(T)\rangle.$$

Тогда

$$\mu_0 = -\frac{g_0^2}{(2\pi)^3\beta m_0^2}\sum_n\int d^3k\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_0\gamma_5\hat{S}_\beta(\omega_n, \mathbf{k};\ \mu_0, \boldsymbol{\mu})\right], \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{g_0^2}{(2\pi)^3\beta m_0^2}\sum_n\int d^3k\,\mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{\gamma}_E\gamma_5\hat{S}_\beta(\omega_n, \mathbf{k};\ \mu_0, \boldsymbol{\mu})\right], \tag{11}$$

где $\hat{S}_\beta$ — фермионные функции Грина при конечной температуре в импульсном представлении с учетом взаимодействия фермионов со средним полем кручения,

$$\hat{S}_\beta(\omega_n, \mathbf{k};\ \mu_0, \boldsymbol{\mu}) = \left[i\omega_n\gamma_0 - i\mathbf{k}\boldsymbol{\gamma}_E + (\gamma_0\mu_0 - i\boldsymbol{\gamma}_E\boldsymbol{\mu})\gamma_5\right]^{-1}.$$

Рассмотрим постоянные решения уравнений (9)—(11). Это ограничение накладывается из-за требования трансляционной инвариантности вакуума. Нетрудно показать, что единственными постоянными решениями уравнений (9) и (11) будут тривиальные решения

$$\langle\breve{Q}_\mu(0)\rangle \equiv 0,\ \boldsymbol{\mu} \equiv 0. \tag{12}$$

Уравнение (10) с учетом ренормировочного соотношения $g_0^2/m_0^2 = g^2/m^2$ приводится к виду

$$\mu_0 = 2\frac{g^2}{m^2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,n(E, \mu_0, T), \tag{13}$$

где $n(E, \mu_0, T)$ — полная плотность распределения фермионов,

$$n(E, \mu_0, T) = n_f - n_{\bar{f}} = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu_0)}+1} - \frac{1}{e^{\beta(E+\mu_0)}+1}, \quad E = |\mathbf{k}|. \tag{14}$$

Таким образом, среднее поле кручения имеет единственную отличную от нуля компоненту $\langle \tilde{Q}_0(T) \rangle$. Особого внимания заслуживает тот факт, что разность плотностей фермионов и антифермионов нетривиальным образом связана с полем кручения, которое в выражении (14) играет роль химического потенциала и по своей статистической природе аналогично ему, когда речь идет об обмене фермионами и антифермионами между отдельными подсистемами.

Заметим также, что в нашем подходе отсутствуют пространственные компоненты кручения. Это является следствием самосогласованного подхода и приводит к пространственной однородности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ivanenko D., Sardanashvily G. Phys. Rev. C, 1983, **94**, p. 3. [2] Румер Ю. Б., Фет А. И. Теория групп и квантовые поля. М.: Наука, 1977. [3] Weyssenhoff J., Raabe M. Acta Phys. Pol., 1947, **9**, p. 7. [4] Hehl F. W. et al. Rev. Mod. Phys., 1975, **48**, N 3, p. 393. [5] Гвоздев А. А., Пронин П. И. В кн.: Фундаментальные взаимодействия. Физика. М.: Изд. МГПИ им. В. И. Ленина, 1984, с. 160. [6] Боголюбов Н. Н. УФН, 1959, **67**, с. 549. [7] Schnitzer H. J. Phys. Rev. D, 1974, **10**, p. 1356. [8] Bender C., Cooper F., Guralnik G. S. Ann. Phys., 1977, **109**, p. 165. [9] Namby Y., Jona-Lasinio G. Phys. Rev. D, 1961, **122**, p. 345. [10] Dolan L., Jackiv R. Phys. Rev. D, 1974, **9**, p. 3320.

Поступила в редакцию
09.02.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, т. 26, № 1

УДК 621.318.136

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СПИНОВЫХ ВОЛН В ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ГРАНАТАХ С МЕЛКИМ ЗЕРНОМ

Е. В. Лебедева, М. К. Родионова, Н. С. Седлецкая, М. А. Харинская

(кафедра радиофизики СВЧ)

Широкое использование поликристаллических магнитных материалов в СВЧ диапазоне и необходимость разработки поликристаллов для устройств высокого уровня мощности определили интерес, который проявляется к механизму влияния размера зерна l на порог параметрического возбуждения спиновых волн $h_{\text{пор}}$.

В настоящее время можно выделить следующие модели, описывающие влияние границ зерен на $h_{\text{пор}}$.

1. Порог возбуждения спиновых волн определяется временем пробега волны по зерну; зерна предполагаются невзаимодействующими; собственные потери в зерне не учитываются [1],

$$h_{\text{про}} = \frac{\omega \Delta H_k}{4\pi M \gamma}, \quad \Delta H_k = \frac{1}{\gamma T}, \quad T = \frac{l}{v_{\text{гр}}}, \tag{1}$$

где ω — частота накачки, ΔH_k — параметр затухания спиновых волн, $4\pi M$ — намагниченность насыщения, γ — гиромагнитное отношение, T — время релаксации спиновых волн, $v_{\text{гр}}$ — групповая скорость.

2. Порог возбуждения спиновых волн определяется временем пробега волны между порами [2]; предполагается, что спиновые волны