

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958:621.372.8.001.24

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ

В. П. Моденов, А. Г. Свешников

(кафедра математики)

В последнее время в связи с разработкой систем автоматизированного проектирования различных устройств, применяемых в технике сверхвысоких частот, все большее значение приобретают методы математического моделирования, на основе которых создаются эффективные численные алгоритмы и программы расчета на ЭВМ СВЧ-устройств.

Широкий класс задач позволяют решать прямые проекционные методы. Одним из таких методов является неполный метод Галеркина [1], сводящий исходную задачу для уравнений в частных производных к краевой задаче для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Вместе с тем численный эксперимент показал, что использование этого метода для решения несамосопряженных краевых задач встречает определенные трудности вычислительного характера, вызванные тем, что получаемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений не всегда являются разрешенными относительно производных.

Предлагаемый в данной работе проекционный метод является обобщением неполного метода Галеркина на комплексное пространство с псевдоскалярным произведением. На основе проекционных соотношений строится приближенное решение в виде линейной комбинации ортогональных в рассматриваемом пространстве комплексных функций с коэффициентами, определяемыми как решение соответствующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных.

Проиллюстрируем построение численного алгоритма, основанного на предлагаемом методе, на примере решения задачи о расчете матрицы рассеяния нормальных волн неоднородным диэлектрическим заполнением на конечном участке длины плоского волновода с импедансной границей.

1. Математическая постановка задачи. Рассмотрим волновод, образованный двумя параллельными плоскостями $x=0$ и $x=1$. Считаем электромагнитное поле не зависящим от координаты y (плоский случай). Пусть среда, заполняющая волновод на конечном участке его длины $0 \leq z \leq d$, характеризуется диэлектрической проницаемостью, которую будем считать кусочно-непрерывной комплексной функцией $\epsilon(x, z)$. Вне этого участка диэлектрическая проницаемость $\epsilon=1$. Магнитная проницаемость $\mu=1$. Будем предполагать, что поле возбуждается нормальной волной номера n_0 , падающей из $-\infty$; процесс возбуждения колебаний считаем установившимся, при этом поля периодически меняются со временем по закону $e^{-i\omega t}$, где $\omega=2\pi c/\lambda_0=kc$, k — волновое число, c — скорость света в пустоте. Считаем нижнюю границу $x=0$ идеально проводящей, а верхнюю $x=1$ импедансной (в общем случае с комплексным импедансом).

В этом случае поле волновода представимо в виде двух независимых типов H - и E -волн. Ограничимся рассмотрением H -волн. В этом случае все компоненты электрического и магнитного полей выражаются через поперечную компоненту электрического поля, которую обозначим через $u(x, z)$. Для ее нахождения получаем следующую математическую задачу.

Требуется найти решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x, z) + k^2 \epsilon(x, z) u(x, z) = 0 \quad (1)$$

в области $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq d\}$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + hu \Big|_{x=1} = 0, \quad (2)$$

где h — комплексная величина, определяемая через заданный поверхностный импеданс; условиями сопряжения, заключающимся в требованиях непрерывности $u(x, z)$ на линиях разрыва функции $\epsilon(x, z)$ и непрерывности производной $\partial u / \partial z$ при $z=0$ и $z=d$, а также условиям излучения, обеспечивающим отсутствие волн, приходящих из бесконечности, за исключением падающей.

Для построения численного алгоритма решения задачи последние условия удобно сформулировать в форме парциальных условий излучения [2]:

$$u(x, z) = Ae^{i\gamma_{n_0} z} X_{n_0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n e^{-i\gamma_n z} X_n(x), \quad z < 0, \quad (3)$$

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{i\gamma_n z} X_n(x), \quad z > d,$$

где A — амплитуда нормальной волны номера n_0 ; R_n и T_n — неизвестные коэффициенты отражения и прохождения, подлежащие определению; $\{X_n(x)\}$ — система комплексных собственных функций несамосопряженной задачи типа Штурма—Лиувилля

$$\begin{aligned} X_n''(x) + \lambda_n^2 X_n(x) &= 0 \quad (0 < x < 1), \\ X_n(0) &= 0, \quad X_n'(1) + hX_n(1) = 0, \end{aligned}$$

которая соответствует системе комплексных собственных значений λ_n , а

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}.$$

Спектральное уравнение для определения комплексных собственных значений является трансцендентным и имеет вид

$$F(\lambda) = \lambda X_n'(\lambda) + hX_n(\lambda) = 0.$$

При выполнении условия отсутствия вырожденных волн [3] функция $F(\lambda)$ имеет только простые корни. В самом деле, рассматриваемая функция является аналитической, и, следовательно, ее простой корень характеризуется тем, что для него

$$F(\lambda) = 0, \quad F'(\lambda) \neq 0.$$

Пусть λ — корень спектрального уравнения. Дифференцируя это уравнение по h и считая, что λ является функцией h , имеющей конечную

производную $\lambda'(h)$, получим

$$\lambda'(h+h^2+\lambda^2)X_n = \lambda X_n.$$

Так как $X_n \neq 0$, $\lambda \neq 0$, то

$$h+h^2+\lambda^2 \neq 0. \quad (4)$$

Учитывая спектральное уравнение, получим, что условие (4) имеет место, когда

$$h \operatorname{tg} i \sqrt{h+h^2} + i \sqrt{h+h^2} \neq 0$$

(условие отсутствия вырожденных волн).

При этом условии корень функции $F(\lambda)$ не является корнем ее производной

$$F'(\lambda) = -\frac{h+h^2+\lambda^2}{\lambda} X_n \neq 0.$$

Таким образом, при условии (4) спектральное уравнение имеет комплексные различные корни. Эти корни могут быть найдены методом дифференцирования по параметру при решении следующей задачи Коши [4]:

$$\frac{d\lambda_n}{dh} = \frac{\lambda_n}{h+h^2+\lambda_n^2}, \quad \lambda_n(0) = n\pi - \frac{\pi}{2}.$$

В комплексном пространстве $L_2(0, 1)$ с псевдоскалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

система комплексных собственных функций $X_n = \sin \lambda_n x$, соответствующая собственным значениям λ_n , обладает свойством полноты и ортогональности:

$$\int_0^1 X_n X_m dx = \|X_n\|^2 \delta_{mn}, \quad (5)$$

где

$$\|X_n\|^2 = \frac{h+h^2+\lambda_n^2}{2(h^2+\lambda_n^2)} \neq 0$$

в силу условия (4).

Из полноты системы $\{X_n(x)\}$ и уравнения (1) следует, что исконое решение исходной задачи должно удовлетворять при каждом фиксированном $z = \text{const}$, принадлежащем отрезку $[0, d]$, интегральным соотношениям

$$\int_0^1 [\Delta u(x, z) + k^2 \varepsilon(x, z)u(x, z)] X_m(x) dx = 0, \quad (6)$$

а вне этого отрезка — соотношениям

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + i\gamma_m u \right) X_m dx = 2iA\gamma_{n_0} \|X_{n_0}\|^2 \delta_{mn_0} \quad \text{при } z < 0, \quad (7)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - i\gamma_m u \right) X_m dx = 0, \quad \text{при } z > d,$$

полученным из парциальных условий излучения (3) ($m=1, 2, \dots$).

2. **Метод решения задачи.** Приближенное решение задачи (1)—(3) будем искать в виде разложения

$$u^N(x, z) = \sum_{n=1}^N A_n(z) X_n(x), \quad (8)$$

где $A_n(z)$ определяется как решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получающейся из требования, чтобы это решение удовлетворяло тем же самым проекционным соотношениям (6) и (7), что и точное решение задачи:

$$\int_0^1 [\Delta u^N(x, z) + k^2 \varepsilon(x, z) u^N(x, z)] X_m(x) dx = 0,$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u^N}{\partial z} + i\gamma_m u^N \right) X_m dx = 2iA\gamma_{n_0} \|X_{n_0}\|^2 \delta_{mn_0}, \quad z < 0,$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u^N}{\partial z} - i\gamma_m u^N \right) X_m dx = 0, \quad z > d$$

$$(m = 1, 2, \dots, N).$$

Подставляя разложение (8) в эти проекционные соотношения и воспользовавшись условиями ортогональности (5), непрерывности решения и его производной при $z=0$ и $z=d$, получим для нахождения коэффициентов разложения следующую краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной:

$$\left. \begin{aligned} A_m''(z) &= \sum_{n=1}^N \alpha_{mn}(z) A_n(z), \\ A_m'(0) + i\gamma_m A_m(0) &= 2iA\gamma_{n_0} \delta_{mn_0}, \\ A_m'(d) - i\gamma_m A_m(d) &= 0, \\ (m &= 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где коэффициенты матрицы системы дифференциальных уравнений определяются по формулам

$$\alpha_{mn}(z) = \lambda_m^2 \delta_{mn} - k^2 \frac{\int_0^1 \varepsilon(x, z) X_n X_m dx}{\|X_m\|^2}.$$

Для решения полученной краевой задачи оказываются эффективными разработанные различные варианты метода прогонки, выбор которых определяется конкретным видом решаемой физической задачи.

Приближенные значения комплексных коэффициентов отражения R_n и прохождения T_n выражаются через решение краевой задачи (9) на концах интервала интегрирования системы.

3. **Применение метода к расчету волноводного фильтра.** Мы ограничились иллюстрацией метода на примере решения простейшей краевой задачи теории плоского импедансного волновода. Аналогично решается задача о рассеянии нормальных волн диэлектрическим

неоднородным заполнением на конечном участке длины волновода, образованного двумя импедансными поверхностями. Данный метод позволяет решить также целый ряд задач теории прямоугольного волновода с локальным диэлектрическим неоднородным заполнением с учетом конечной проводимости стенок волновода.

В качестве примера рассмотрено применение данного проекционного метода для численного исследования резонансных свойств диэлектрической призмы в прямоугольном волноводе [5] с импедансной боковой поверхностью. (На рис. 1 показано сечение этой призмы.)

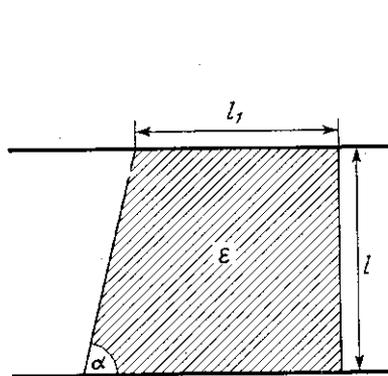


Рис. 1.

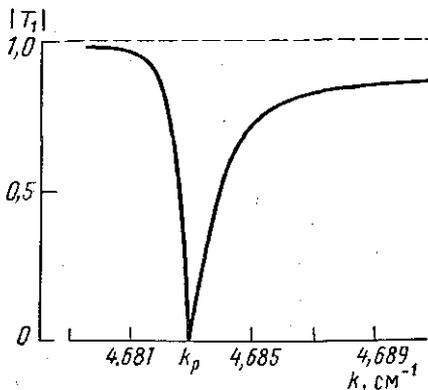


Рис. 2

Важной характеристикой рассматриваемого устройства является частота резонанса диэлектрического тела в волноводе. Для ее определения рассчитывалась частотная зависимость модуля коэффициента прохождения $|T_1|$ нормальной волны H_{10} в нужном диапазоне частот. На рис. 2 показана эта зависимость, полученная при следующих параметрах счета: геометрические размеры образца $l=2,3$ см, $l_1=1,36$ см, диэлектрическая проницаемость $\epsilon=2,05+0,001i$, удельная проводимость материала поверхности волновода $\sigma=5,7 \cdot 10^6$ CGSE, $\alpha=80,2^\circ$.

Результаты вычислений показали, что на значение резонансной частоты k_p существенным образом влияет изменение геометрических параметров диэлектрика и значения действительной части диэлектрической проницаемости. Учет конечной проводимости стенок волновода также сказывается на значении частоты k_p и изменяет ее на 3—5%. Мнимая часть диэлектрической проницаемости главным образом определяет глубину пика режекции и его добротность.

На основе предлагаемого метода разработаны и реализованы на ЭВМ алгоритмы решения целого класса электродинамических задач, связанных с машинным проектированием различного рода резонансных волноводных фильтров, *fin-line* [6] и других устройств с учетом конечной проводимости металла и потерь в диэлектрике. Полученные в результате счета основные характеристики рассмотренных устройств отличаются от экспериментальных не более чем на 1%, что говорит о весьма высокой эффективности данного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Свешников А. Г. ДАН СССР, 1977, 236, с. 1076. [2] Свешников А. Г. ЖВМ и МФ, 1963, 3, с. 314. [3] Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во МГУ, 1983. [4] Моденов В. П. Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и киберн., 1981, № 4, с. 43. [5] Ва-

УДК 536.7

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ТИПА ЛИ

А. В. Солдатов

(кафедра теоретической физики)

1. **Введение.** Исследование системы N двухуровневых атомов, заключенных в резонаторе объема V и взаимодействующих с электромагнитным полем, всегда имело как чисто математическое, так и прикладное значение. Интерес к подобным системам заметно возрос после публикации Дикке [1], которому удалось аппроксимировать реальную картину взаимодействия посредством простой модели:

$$H = \omega b^+ b + \Omega \sum_{j=1}^N \sigma_j^z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (b^+ \sigma_j^- + \sigma_j^+ b). \quad (1)$$

Здесь b^+ , b — операторы рождения и уничтожения бозонов, σ_j^a ($a=x, y, z$) — матрицы Паули, соответствующие спину $1/2$, $\sigma_j^\pm = \sigma_j^x \pm i\sigma_j^y$, ω — энергия выделенной бозонной моды, Ω — разность энергий двух возможных состояний атома, λ — константа взаимодействия бозонов с системой двухуровневых атомов. N — число атомов в системе. Точное решение для термодинамически равновесной модели (1) впервые получили Хелп и Либ [2], точно вычислившие в термодинамическом пределе ($t \rightarrow 0$; $N, V \rightarrow \infty, N/V = \text{const}$) плотность свободной энергии и некоторые другие термодинамические характеристики системы. Оказалось, что при определенных условиях в системе имеет место переход второго рода в «сверхизлучающее» состояние, в котором возникает макроскопическое заполнение бозонной моды и соответствующее ему упорядочение спинов в атомной подсистеме. В последующих работах на различном уровне математической строгости исследовались более сложные модели типа Дикке [3—13].

Отметим, что во всех вышеперечисленных публикациях адекватным математическим образом двухуровневого атома служили матрицы Паули. Представляется интересным рассмотреть модель, описывающую взаимодействие квантованного электромагнитного поля с квантовой системой двухуровневых объектов, отличных по математическим свойствам от используемых в модели Дикке матриц Паули, и исследовать ее на предмет существования «сверхизлучательного» фазового перехода.

2. **Модель типа Ли.** Рассмотрим модельный гамильтониан вида

$$H = \omega b^+ b + \varepsilon \sum_{n=1}^N \sum_{\sigma} a_{n\sigma}^+ a_{n\sigma} + \frac{\Omega}{2} \sum_{n=1}^N (a_{n\uparrow}^+ a_{n\uparrow} - a_{n\downarrow}^+ a_{n\downarrow}) + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N (b^+ a_{n\downarrow}^+ a_{n\uparrow} + a_{n\uparrow}^+ a_{n\downarrow} b). \quad (2)$$