сильева Т. И., Кириленко А. А., Рудь Л. А. В кн.: Проектирование и применение радиоэлектронных устройств на диэлектрических волноводах и резонаторах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983, с. 71. [6] Arndt F. et al. IEEE Trans., 1982, MTT-30, N 2, p. 1381.

Поступила в редакцию
05.03.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 2

УДК 536.7

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ТИПА ЛИ

А. В. Солдатов

(кафедра теоретической физики)

1. **Введение.** Исследование системы N двухуровневых атомов, заключенных в резонаторе объема V и взаимодействующих с электромагнитным полем, всегда имело как чисто математическое, так и прикладное значение. Интерес к подобным системам заметно возрос после публикации Дикке [1], которому удалось аппроксимировать реальную картину взаимодействия посредством простой модели:

$$H = \omega b^+ b + \Omega \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} (b^+ \sigma_j^- + \sigma_j^+ b). \qquad (1)$$

Здесь b^+, b — операторы рождения и уничтожения бозонов, $\sigma_j^\alpha (\alpha = x, y, z)$ — матрицы Паули, соответствующие спину 1/2, $\sigma_j^\pm = \sigma_j^x \pm i\sigma_j^y$, ω — энергия выделенной бозонной моды, Ω — разность энергий двух возможных состояний атома, λ — константа взаимодействия бозонов с системой двухуровневых атомов. N — число атомов в системе. Точное решение для термодинамически равновесной модели (1) впервые получили Хепп и Либ [2], точно вычислившие в термодинамическом пределе (t-lim : N, $V \to \infty$, $N/V = \mathrm{const}$) плотность свободной энергии и некоторые другие термодинамические характеристики системы. Оказалось, что при определенных условиях в системе имеет место переход второго рода в «сверхизлучающее» состояние, в котором возникает макроскопическое заполнение бозонной моды и соответствующее ему упорядочение спинов в атомной подсистеме. В последующих работах на различном уровне математической строгости исследовались более сложные модели типа Дикке [3—13].

Отметим, что во всех вышеперечисленных публикациях адекватным математическим образом двухуровневого атома служили матрицы Паули. Представляется интересным рассмотреть модель, описывающую взаимодействие квантованного электромагнитного поля с квантовой системой двухуровневых объектов, отличных по математическим свойствам от используемых в модели Дикке матриц Паули, и исследовать ее на предмет существования «сверхизлучательного» фазового перехода.

2. **Модель типа Ли.** Рассмотрим модельный гамильтониан вида

$$H = \omega b^+ b + \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \sum_{\sigma} a_{n\sigma}^+ a_{n\sigma} + \frac{\Omega}{2} \sum_{n=1}^{N} (a_{n\uparrow}^+ a_{n\uparrow} - a_{n\downarrow}^+ a_{n\downarrow}) +$$
$$+ \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} (b^+ a_{n\downarrow}^+ a_{n\uparrow} + a_{n\uparrow}^+ a_{n\downarrow} b). \qquad (2)$$

Здесь $a^+_{n\sigma}$, $a_{n\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения электронов в состоянии n с проекцией спина на ось z, равной σ ($\sigma=\pm 1/2$ или $\sigma=\uparrow, \downarrow$), удовлетворяющие обычным антикоммутационным соотношениям

$$[a_{n'\sigma'}, a^+_{n\sigma}]_+ = \delta_{nn'}\delta_{\sigma\sigma'}, \ [a_{n\sigma}, a_{n'\sigma'}]_+ = 0,$$

$\mathcal{E}$ — энергия свободного электрона в состоянии (n, σ). Если ферми-операторы $a^+_{n\sigma}$, $a_{n\sigma}$ определены на пространстве функций от числа заполнения, удовлетворяющих условию

$$n_{n\uparrow}+n_{n\downarrow}=1 \quad \forall n, \quad n_{n\sigma}=a^+_{n\sigma}a_{n\sigma},$$

и $\mathcal{E}=0$, то модель (2) полностью эквивалентна модели (1). Если же $n_{n\uparrow}+n_{n\downarrow}=0,\ 1,\ 2;\ \mathcal{E}=0$, то мы приходим к модели «трехлинейного» взаимодействия, которая исследовалась в работе [14], но точных результатов для этой модели получено не было. Модель (2) можно рассматривать как модель, описывающую взаимодействие квантованного электромагнитного поля с подсистемой электронов, расположенных в узлах произвольной решетки, причем в каждом узле может находиться не более двух электронов. N — число узлов решетки.

Целью нашего дальнейшего исследования является получение точных в термодинамическом пределе результатов для модели (2), точных предельных выражений для плотности свободной энергии и других термодинамических характеристик системы, условий существования «сверхизлучательного» фазового перехода, величины критической температуры перехода в зависимости от параметров модельного гамильтониана.

3. **Асимптотически точная плотность свободной энергии.** Вычислим плотность свободной энергии для модели (2), воспользовавшись методом аппроксимирующего гамильтониана [10]. Как было показано [10], если гамильтониан системы имеет вид

$$H = H_L + \sum_{k=1}^{M} \omega_k b_k^+ b_k + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{M} \lambda_k (b_k L_k^+ + L_k^- b_k^+),$$

$$\lambda_k > 0,\ \omega_k > 0,\ L_k^+ = (L_k^-)^+ \forall k,$$

и операторы H_L, b_k^+, b_k, L_k^+, L_k^- удовлетворяют условиям

$$f_N[H_L] \leqslant C_1 = \text{const},\ N^{-1}\|L^\pm\| \leqslant C_2,\ [b_k b_{k'}^+] = \delta_{kk'},\ [b_k, b_{k'}] = [b_k, L_{k'}^+] = 0, \tag{3}$$

где

$$f_N[H_L] = -\frac{1}{\beta N}\ln \mathrm{Sp}(e^{-\beta H_L}),\ \|L^\pm\| = \sup_{u\in\mathcal{B}} \frac{\|L^\pm u\|}{\|u\|}$$

— норма оператора $L^\pm$, u — вектор гильбертова пространства, и, кроме того, существует

$$f_\infty[H(\eta)] = \text{t-lim} f_N[H(\eta)], \tag{4}$$

где

$$H(\eta) = H_L - \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{\lambda_k^2}{\omega_k}(L_k^+\eta_k + \overset{*}{\eta}_k L_k^-) - \frac{N\lambda_k^2}{\omega_k}|\eta_k|^2 \right),\ \eta_k \in C\ \forall k,$$

то

$$\text{t-lim} f_N[H] = t\text{-lim} f_N[H(\bar{\eta})] = f_\infty[H], \tag{5}$$

причем точки $\bar{\eta}=\{\bar{\eta}_k\}^M{}_{k=1}$, обеспечивающие абсолютный минимум плотности аппроксимирующей свободной энергии $f_\infty[H(\eta)]$, удовлетворяют системе предельных уравнений самосогласования

$$\frac{\omega_k}{\lambda_k^2}\frac{\partial f_\infty}{\partial \eta_k^*}[H(\eta)]=\eta_k-\text{t-lim}\left\langle\frac{L^-}{N}\right\rangle_{H(\eta)}=0,$$

$$\frac{\omega_k}{\lambda_k^2}\frac{\partial f_\infty}{\partial \eta_k}[H(\eta)]=\eta_k^*-\text{t-lim}\left\langle\frac{L^+}{N}\right\rangle_{H(\eta)}=0,$$

где $\langle L^\pm\rangle_{H(\eta)}=\operatorname{Sp}(L^\pm e^{-\beta H(\eta)})\operatorname{Sp}^{-1}(e^{-\beta H(\eta)})$.

Введем обозначения:

$$H_L=\left(\mathscr{E}+\frac{\Omega}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}a_{n\uparrow}^+a_{n\uparrow}+\left(\mathscr{E}-\frac{\Omega}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}a_{n\downarrow}^+a_{n\downarrow},$$

$$L^+=\sum_{n=1}^{N}a_{n\uparrow}^+a_{n\downarrow},\quad L^-=\sum_{n=1}^{N}a_{n\downarrow}^+a_{n\uparrow}.$$

Легко видеть, что условия (3), (4) выполняются для гамильтониана (2), и, следовательно, гамильтониан

$$H(\eta)=\left(\mathscr{E}+\frac{\Omega}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}a_{n\uparrow}^+a_{n\uparrow}+\left(\mathscr{E}-\frac{\Omega}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}a_{n\downarrow}^+a_{n\downarrow}-$$

$$-\frac{\lambda^2}{\omega}\sum_{n=1}^{N}(a_{n\uparrow}^+a_{n\downarrow}\eta+\eta^*a_{n\downarrow}^+a_{n\uparrow})+\frac{N\lambda^2}{\omega}|\eta|^2 \qquad (6)$$

термодинамически эквивалентен гамильтониану (2) в смысле (5). Заметим, что гамильтонианы (2), (6) коммутируют с оператором полного числа электронов $\mathscr{N}=\sum_{n=1}^{N}(a_{n\uparrow}^+a_{n\uparrow}+a_{n\downarrow}^+a_{n\downarrow})$.

Перейдем к большому каноническому распределению с химическим потенциалом μ. Согласно [10] предыдущие рассуждения о термодинамической эквивалентности гамильтонианов (2), (6) в смысле (5) остаются справедливыми в случае большого канонического распределения и гамильтониан (6) по-прежнему термодинамически эквивалентен гамильтониану (2) в том смысле, что

$$\text{t-lim}\,\tilde{f}_N[H]=\text{t-lim}\,\tilde{f}_N[H(\bar{\eta})],\quad \text{где}\quad \tilde{f}_N[H]=f_N[H-\mu\mathscr{N}]. \qquad (7)$$

Параметр $\bar{\eta}$, обеспечивающий абсолютный минимум $\tilde{f}_\infty[H(\eta)]$, удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\omega}{\lambda^2}\frac{\partial\tilde{f}_\infty}{\partial\eta^*}[H(\eta)]=\eta-\text{t-lim}\left\langle\frac{L^-}{N}\right\rangle_{H(\eta)-\mu\mathscr{N}}=0,$$

$$\frac{\omega}{\lambda^2}\frac{\partial\tilde{f}_\infty}{\partial\eta}[H(\eta)]=\eta^*-\text{t-lim}\left\langle\frac{L^+}{N}\right\rangle_{H(\eta)-\mu\mathscr{N}}=0. \qquad (8)$$

Плотность свободной энергии $f_N[H]$ связана с $\tilde{f}_N[H]$ известным соотношением: $f_N[H]=\mu n+\tilde{f}_N[H]$, где n — средняя концентрация электронов в системе,

$$n = -\frac{\partial}{\partial\mu}\tilde{f}_N[H]. \tag{9}$$

Предельную плотность свободной энергии $f_\infty[H(\eta)]$ нетрудно вычислить, используя стандартную технику диагонализации гамильтониана (6):

$$f_\infty[H(\eta)] = \frac{\lambda^2}{\omega}|\eta|^2 + \mathscr{E} + \mu(\bar{n}-1) - \frac{1}{\beta}\ln\left(2\left(\operatorname{ch}\beta(\mu-\mathscr{E}) + \operatorname{ch}\frac{\beta\Omega_\lambda}{2}\right)\right),$$

$$\Omega_\lambda = \left[\Omega^2 + \frac{4\lambda^4}{\omega^2}|\eta|^2\right]^{1/2}, \tag{10}$$

где $\bar{n} = \text{t-}\lim n$. В силу (7) выражение (10) дает точное предельное значение плотности свободной энергии для гамильтониана (2), если η удовлетворяет системе уравнений (8).

4. Условия существования «сверхизлучательного» фазового перехода. Согласно (8), (9), приходим к системе уравнений относительно η, μ:

$$\eta\left(1 + \frac{\lambda^2}{2\omega\Omega_\lambda}\left(\operatorname{th}\frac{\beta}{2}\left(\mu-\mathscr{E}-\frac{\Omega_\lambda}{2}\right) - \operatorname{th}\frac{\beta}{2}\left(\mu-\mathscr{E}+\frac{\Omega_\lambda}{2}\right)\right)\right) = 0, \tag{11.1}$$

$$\bar{n} = 1 + \frac{1}{2}\left(\operatorname{th}\frac{\beta}{2}\left(\mu-\mathscr{E}-\frac{\Omega_\lambda}{2}\right) + \operatorname{th}\frac{\beta}{2}\left(\mu-\mathscr{E}+\frac{\Omega_\lambda}{2}\right)\right). \tag{11.2}$$

Из (11.2) немедленно следует, что $0<\bar{n}<2$. Уравнение (11.1) всегда допускает тривиальное решение $\eta=0$. Найдем условия существования нетривиальных решений $\eta\neq 0$ системы (11). Разрешим систему уравнений (11) относительно гиперболических функций:

$$\operatorname{th}\frac{\beta}{2}\left(\mu-\mathscr{E}-\frac{\Omega_\lambda}{2}\right) = \bar{n} - 1 - \frac{\omega\Omega_\lambda}{\lambda^2}, \tag{12.1}$$

$$\operatorname{th}\frac{\beta}{2}\left(\mu-\mathscr{E}+\frac{\Omega_\lambda}{2}\right) = \bar{n} - 1 + \frac{\omega\Omega_\lambda}{\lambda^2}. \tag{12.2}$$

Из (12.1), (12.2) следует, что для разрешимости системы (11) относительно η, μ необходимо выполнение условий совместности:

$$\omega\Omega_\lambda/\lambda^2 < \bar{n} < 2 - \omega\Omega_\lambda/\lambda^2, \quad \omega\Omega_\lambda/\lambda^2 < 1. \tag{13}$$

Условия совместности показывают, что нетривиальные решения могут существовать при условии

$$\omega|\Omega|/\lambda^2 < \bar{n} < 2 - \omega|\Omega|/\lambda_2, \quad \omega|\Omega|/\lambda^2 < 1. \tag{14}$$

Разрешим систему уравнений (12) относительно β:

$$\beta = \frac{2}{\Omega_\lambda}\operatorname{Arth}\left[\frac{2\omega\Omega_\lambda\lambda^2}{\lambda^4(1-(\bar{n}-1)^2) + (\omega\Omega_\lambda)^2}\right]. \tag{15}$$

Из (15) следует второе необходимое условие существования нетривиального решения системы (11):

$$\beta > \beta_c = \beta|_{\eta=0} = (kT_c)^{-1}, \tag{16}$$

$$\beta_c = \frac{2}{|\Omega|}\operatorname{Arth}\left[\frac{2\omega|\Omega|\lambda^2}{\lambda^4(1-(\bar{n}-1)^2) + (\omega\Omega)^2}\right].$$

Можно показать [10], что $\frac{\lambda^2}{\omega^2}|\bar{\eta}|^2 = \left\langle\left\langle\frac{b^+b}{N}\right\rangle\right\rangle_{H-\mu\mathcal{N}}$, где $\langle\langle\ldots\rangle\rangle_{H-\mu\mathcal{N}}$ есть квазисреднее:

$$\langle\langle\ldots\rangle\rangle_{H-\mu\mathcal{N}}=\lim_{\tau\to 0}\{\text{t-lim}\,\langle\ldots\rangle_{\Gamma(\bar\eta,2\tau)}\},$$

$$\Gamma(\bar\eta,2\tau)=H-\mu\mathcal{N}+2\tau N\omega\left(\frac{b^+}{\sqrt{N}}+\frac{\lambda}{\omega}\bar\eta^*\right)\left(\frac{b}{\sqrt{N}}+\frac{\lambda}{\omega}\bar\eta\right).$$

Величина $(\lambda^2/\omega^2)|\bar\eta|^2$ является, таким образом, макроскопической плотностью энергии электромагнитного поля в единицах ω, а условия (14), (16) — это условия существования «сверхизлучающего» состояния системы электромагнитного поля и вещества, β_c — критическая обратная температура «сверхизлучательного» фазового перехода. Зависимость $\bar f_\infty[H(\eta)]$ от температуры показывает, что при $\beta>\beta_c$ нетривиальное решение системы уравнений (11) реализует минимальное значение $\bar f_\infty[H(\eta)]$ по сравнению с возможным тривиальным решением, так что при выполнении условий (14) «сверхизлучательный» фазовый переход действительно имеет место. Единственность нетривиального решения следует из (15).

Найдем максимальное значение плотности энергии электромагнитного поля, которое достигается при $T=0$. Из (15) с учетом условий совместности (13) получим

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2}|\bar\eta|^2_{\max}=((\bar n\lambda^2)^2-(\omega\Omega)^2)(2\omega\lambda)^{-2}\ \text{при}\ \frac{\omega|\Omega|}{\lambda^2}<\bar n\leqslant 1,$$

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2}|\bar\eta|^2_{\max}=((\bar n-2)^2\lambda^4-(\omega\Omega)^2)(2\omega\lambda)^{-2}\ \text{при}\ 1\leqslant\bar n<2-\frac{\omega|\Omega|}{\lambda^2}.$$

Плотность энтропии непрерывна в точке $\beta=\beta_c$, а удельная (на один узел решетки) теплоемкость c_v испытывает в этой точке разрыв:

$$\Delta c_v=c_v(\beta_c+0)-c_v(\beta_c-0)>0.$$

Следовательно, «сверхизлучательный» фазовый переход в модели типа Ли относится к фазовым переходам второго рода.

5. **Упорядочение в электронной подсистеме.** Исследуем зависимость удельной намагниченности электронной подсистемы от температуры. Очевидно, что

$$\mathcal{M}_z=\text{t-lim}\left\langle\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}(a^+_{n\uparrow}a_{n\uparrow}-a^+_{n\downarrow}a_{n\downarrow})}{N}\right\rangle_{H-\mu\mathcal{N}}=\frac{\partial\bar f_\infty[H]}{\partial(\Omega/2)}=\frac{\partial\bar f_\infty}{\partial(\Omega/2)}[H(\bar\eta)],$$

где $\mathcal{M}_z$ — удельная намагниченность электронной подсистемы вдоль оси z в единицах магнетона Бора. В интервале температур $T_c\leqslant T<$ $<+\infty$

$$\mathcal{M}_z=-\operatorname{sh}\left(\frac{\beta\Omega}{2}\right)\left(\operatorname{ch}\frac{\beta}{2}\left(\mu-\mathcal{E}+\frac{\Omega}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{\beta}{2}\left(\mu-\mathcal{E}-\frac{\Omega}{2}\right)\right)^{-1}.$$

По мере понижения температуры до T_c абсолютная величина удельной намагниченности монотонно возрастает. При $T=T_c$ $\mathcal{M}_z=-\Omega\omega/\lambda^2$. В силу (11.1) $\mathcal{M}_z=-(\Omega\omega/\lambda^2)\ \forall T\leqslant T_c$, т. е. какого-либо изменения $\mathcal{M}_z$ при понижении температуры от T_c до 0 не происходит. Если же в системе невозможен «сверхизлучательный» фазовый переход, то $\mathcal{M}_z$ монотонно изменяется от 0 при $T=+\infty$ до $\mathcal{M}_z=-\operatorname{sign}(\Omega)\bar n$, если $0<$ $<\bar n\leqslant 1$ (или до $\mathcal{M}_z=(\bar n-2)\operatorname{sign}(\Omega)$, если $1\leqslant\bar n<2$), при $T=0$.

Рассмотрим поведение удельных намагниченностей вдоль осей x, y.

$$\mathcal{M}_x = \text{t-lim}\left\langle \frac{L^+ + L^-}{N} \right\rangle_{H(\bar{\eta})-\mu\mathcal{N}}, \quad \mathcal{M}_y = \text{t-lim}\left\langle \frac{L^+ - L^-}{iN} \right\rangle_{H(\bar{\eta})-\mu\mathcal{N}}. \tag{17}$$

Из уравнений самосогласования (8) следует, что

$$\bar{\eta}^* = \text{t-lim}\left\langle \frac{L^+}{N} \right\rangle_{H(\bar{\eta})-\mu\mathcal{N}}, \quad \bar{\eta} = \text{t-lim}\left\langle \frac{L^-}{N} \right\rangle_{H(\bar{\eta})-\mu\mathcal{N}}. \tag{18}$$

Можно показать [10], что

$$\text{t-lim}\left\langle \frac{L^\pm}{N} \right\rangle_{H(\bar{\eta})-\mu\mathcal{N}} = \left\langle\left\langle \frac{L^\pm}{N} \right\rangle\right\rangle_{H-\mu\mathcal{N}},$$

где $\ll\ldots\gg_{H-\mu\mathcal{N}}$ — квазисреднее. Из (17), (18) получим $\mathcal{M}_x = 2\mathrm{Re}\,\bar{\eta}$, $\mathcal{M}_y = -2\mathrm{Im}\,\bar{\eta}$.

Согласно (16), при $T \geqslant T_c$ намагниченность вдоль осей x, y отсутствует. При понижении температуры от T_c до 0 составляющие $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$ появляются, вектор удельной намагниченности $\vec{\mathcal{M}}$ поворачивается на некоторый угол от первоначального при $T \geqslant T_c$ направления. Абсолютная величина удельной намагниченности возрастает при этом по закону $|\vec{\mathcal{M}}| = \omega\Omega_\lambda/\lambda^2$. Максимальный угол поворота вектора удельной намагниченности достигается при $T=0$:

$$f_{\max} = \operatorname{arctg}\left(\frac{(\bar{n}\lambda^2)^2 - (\Omega\omega)^2}{(\omega\Omega)^2}\right)^{1/2}, \quad \frac{|\Omega|\omega}{\lambda^2} < \bar{n} \leqslant 1,$$

$$f_{\max} = \operatorname{arctg}\left(\frac{(\bar{n}-2)^2\lambda^4 - (\Omega\omega)^2}{(\omega\Omega)^2}\right)^{1/2}, \quad 1 \leqslant \bar{n} < 2 - \frac{|\Omega|\omega}{\lambda^2}.$$

6. **Заключение.** Полученные результаты позволяют утверждать, что в модели типа Ли в термодинамическом пределе при выполнении условий, выражаемых неравенствами (13), имеет место равновесный «сверхизлучательный» фазовый переход второго рода, приводящий к появлению в системе макроскопического электромагнитного поля. Этот процесс сопровождается изменением первоначального при $T \geqslant T_c$ упорядочения в подсистеме вещества, которое выражается в независимости составляющей вектора удельной намагниченности $\mathcal{M}_z$ от температуры при $T_c \geqslant T \geqslant 0$ и повороте вектора удельной намагниченности от первоначального при $T \geqslant T_c$ направления. При $\mathcal{E}=0$ полученные результаты представляют точное в термодинамическом пределе решение модели «трехлинейного» взаимодействия. Таким образом, посредством метода аппроксимирующего гамильтониана получено доказательство асимптотической точности результатов, найденных в работе [14] методом континуального интегрирования. Согласно п. 3, результаты данной работы обобщаются на случай взаимодействия с конечным числом бозонных мод M путем замены $\frac{\lambda^2}{\omega} \Rightarrow \sum_{k=1}^{M} \frac{\lambda_k^2}{\omega_k}$, где ω_k — энергия k-й моды, λ_k — константа взаимодействия с k-й модой.

Автор считает приятным долгом выразить благодарность Н. Н. Боголюбову (мл.), А. М. Курбатову и А. Н. Кирееву за обсуждение отдельных проблем и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Dicke R. H. Phys. Rev., 1954, **93**, p. 99. [2] Hepp K., Lieb E. H. Ann. of Phys., 1973, **76**, p. 360. [3] Gilmore R. Phys. Lett., 1976, **55 A**, p. 459. [4] Hepp K., Lieb E. H. Phys. Rev., 1973, **A8**, p. 2517. [5] Orszag M. J. Phys. A, 1977, **10**, p. 1995. [6] Orszag M. J. Phys. A, 1977, **10**, p. 25. [7] Pimentel B. M., Zimerman A. H. Phys. Lett., 1975, **53 A**, p. 200. [8] Pimentel B. M., Zimer-

man A. H. Nuovo Cim., 1975, **30 B**, p. 43. [9] Rzaźewski K., Wódkewicz K., Żakowicz W. Phys. Lett., 1976, **58 A**, p. 211. [10] Боголюбов Н. Н. (мл.), Бранков И. Г., Загребнов В. А., Курбатов А. М., Тончев Н. С. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. София, 1981. [11] Курбатов А. М. Препринт ОИЯИ Р 17-12805. Дубна, 1979. [12] Ермилов А. Н., Курбатов А. М. Препринт ОИЯИ Р 17-10247. Дубна, 1976. [13] Gilmore R., Narducci L. M. Phys. Rev., 1978, **A 17**, p. 1747. [14] Кирьянов В. Б., Ярунин В. С. ТМФ, 1982, **51**, с. 456.

Поступила в редакцию
06.03.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 2

УДК 539.12

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В КВАНТОВАННОЙ ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ ВОЛНЕ (II)

В. Р. Халилов, В. К. Перес-Фернандес

(кафедра теоретической физики)

В нашей предыдущей работе [1] были найдены точные решения уравнения Дирака для нуклонов p и n, находящихся в классическом плосковолновом поле π-конденсата и в поле квантовых π-мезонных возбуждений. Предполагалось, что 4-вектор энергии-импульса k_μ как конденсатного поля, так и квантовых возбуждений удовлетворяет условию $k^2=0$. Разумеется, такая постановка задачи является модельной. В более реалистической ситуации амплитуда Φ, энергия k_0 и импульс $\mathbf{k}$ плосковолнового классического поля π-конденсата определяются из условия минимальности эффективного лагранжиана конденсатного поля $L_\pi(\Phi, \mathbf{k}, k_0)$ [2] и заранее не известны. Таким образом, чтобы не ограничиться методической значимостью полученных в [1] решений, необходимо снять ограничение $k^2=0$.

Напомним постановку задачи: изотопический дуплет нуклонов p и n, описываемый волновой функцией $\psi=(\psi_p, \psi_n)$, удовлетворяет уравнению

$$\{i\gamma^\mu\partial_\mu - m - ig\gamma^5(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Phi})\}\psi=0. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ — матрицы Паули, g — константа взаимодействия, m — масса нуклона, а $\boldsymbol{\Phi}$ — векторное поле пространства представления изотопического спина, заданное в виде $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}_{\text{кл}}+\boldsymbol{\Phi}_{\text{кв}}$:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Phi}_{\text{кл}}=\Phi\{\cos(kx),\ \sin(kx),\ 0\},\\ \boldsymbol{\Phi}_{\text{кв}}=\{a^+e^{-i(kx)}+ae^{i(kx)},\quad ia^+e^{-i(kx)}-iae^{i(kx)},\ 0\}.\end{gathered} \tag{2}$$

Очевидно, a^+ и a имеют смысл операторов рождения и уничтожения π^--мезона в состоянии с энергией k_0 и импульсом $\mathbf{k}$. Однако, в отличие от [1], 4-вектор энергии-импульса k_μ произволен.

Для решения уравнения (1) воспользуемся цепочкой преобразований [1]:

$$\psi=\exp\left\{-\frac{i\tau_3}{2}(kx)-i(px)\right\}U, \tag{3}$$

$$U=Su,$$

где $S=N[1-iQg(\Phi\tau_1+a_1)\gamma^5\hat{k}]$, $a_1=2(\tau_+a^++\tau_-a)$, $\tau_\pm=(\tau_1\pm i\tau_2)/2$,

$$\hat{k}=\gamma^\mu k_\mu,$$