man A. H. Nuovo Cim., 1975, **30 B**, p. 43. [9] Rzażewski K., Wódkewicz K., Żakowicz W. Phys. Lett., 1976, **58 A**, p. 211. [10] Боголюбов Н. Н. (мл.), Бранков И. Г., Загребнов В. А., Курбатов А. М., Тончев Н. С. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. София, 1981. [11] Курбатов А. М. Препринт ОИЯИ Р 17-12805. Дубна, 1979. [12] Ермилов А. Н., Курбатов А. М. Препринт ОИЯИ Р 17-10247. Дубна, 1976. [13] Gilmore R., Narducci L. M. Phys. Rev., 1978, **A 17**, p. 1747. [14] Кирьянов В. Б., Ярунин В. С. ТМФ, 1982, **51**, с. 456.

Поступила в редакцию
06.03.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 2

УДК 539.12

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В КВАНТОВАННОЙ ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ ВОЛНЕ (II)

В. Р. Халилов, В. К. Перес-Фернандес

(кафедра теоретической физики)

В нашей предыдущей работе [1] были найдены точные решения уравнения Дирака для нуклонов p и n, находящихся в классическом плосковолновом поле π-конденсата и в поле квантовых π-мезонных возбуждений. Предполагалось, что 4-вектор энергии-импульса k_μ как конденсатного поля, так и квантовых возбуждений удовлетворяет условию $k^2=0$. Разумеется, такая постановка задачи является модельной. В более реалистической ситуации амплитуда Φ, энергия k_0 и импульс $\mathbf{k}$ плосковолнового классического поля π-конденсата определяются из условия минимальности эффективного лагранжиана конденсатного поля $L_\pi(\Phi, \mathbf{k}, k_0)$ [2] и заранее не известны. Таким образом, чтобы не ограничиться методической значимостью полученных в [1] решений, необходимо снять ограничение $k^2=0$.

Напомним постановку задачи: изотопический дуплет нуклонов p и n, описываемый волновой функцией $\psi=(\psi_p, \psi_n)$, удовлетворяет уравнению

$$\{i\gamma^\mu\partial_\mu - m - ig\gamma^5(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Phi})\}\psi=0. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ — матрицы Паули, g — константа взаимодействия, m — масса нуклона, а $\boldsymbol{\Phi}$ — векторное поле пространства представления изотопического спина, заданное в виде $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}_{\text{кл}}+\boldsymbol{\Phi}_{\text{кв}}$:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Phi}_{\text{кл}}=\Phi\{\cos(kx),\ \sin(kx),\ 0\},\\ \boldsymbol{\Phi}_{\text{кв}}=\{a^+e^{-i(kx)}+ae^{i(kx)},\ \ ia^+e^{-i(kx)}-iae^{i(kx)},\ 0\}.\end{gathered} \tag{2}$$

Очевидно, a^+ и a имеют смысл операторов рождения и уничтожения π^--мезона в состоянии с энергией k_0 и импульсом $\mathbf{k}$. Однако, в отличие от [1], 4-вектор энергии-импульса k_μ произволен.

Для решения уравнения (1) воспользуемся цепочкой преобразований [1]:

$$\psi=\exp\left\{-\frac{i\tau_3}{2}(kx)-i(px)\right\}U, \tag{3}$$

$$U=Su,$$

где $S=N[1-iQg(\Phi\tau_1+a_1)\gamma^5\hat{k}]$, $a_1=2(\tau_+a^++\tau_-a)$, $\tau_\pm=(\tau_1\pm i\tau_2)/2$,

$$\hat{k}=\gamma^\mu k_\mu,$$

N и Q — скалярные функции, зависящие в общем случае от p_μ, k_μ и числа π^--мезонных возбуждений n.

Несложные выкладки (см. [1]) с использованием преобразования (3) позволяют переписать уравнение Дирака (1) следующим образом:

$$[1+iQg(\Phi\tau_1+a_1)\gamma^5\hat{k}]\{\hat{p}-m+[Qg^2(\Phi^2+\Phi(a_1\tau_1+\tau_1a_1)+a_1a_1)-$$
$$-\tau_3/2]\hat{k}\}u+g(\Phi\tau_1+a_1)\gamma^5\{Q^2g^2k^2[\Phi^2+\Phi(a_1\tau_1+\tau_1a_1)+a_1a_1]+$$
$$+2Q(pk)+1\}u=0. \qquad (4)$$

Следовательно, задачу удается решить, если потребовать, чтобы уравнение

$$\{\hat{p}-m+[g^2Q(\Phi^2+\Phi(a_1\tau_1+\tau_1a_1)+a_1a_1)-\tau_3/2]\hat{k}\}\,u=0 \qquad (5)$$

удовлетворялось одновременно с уравнением

$$\{g^2k^2Q^2[\Phi^2+\Phi(a_1\tau_1+\tau_1a_1)+a_1a_1]+2Q(pk)+1\}u=0. \qquad (6)$$

То, что это требование не является противоречивым, вытекает из коммутативности операторов, стоящих в фигурных скобках уравнений (5) и (6). Нетрудно также усмотреть, что необходимым условием совместного решения уравнений (5) и (6) является пропорциональность оператора $C=\Phi(a_1\tau_1+\tau_1a_1)+a_1a_1$ единичной матрице.

Рассмотрим далее нормированные операторы $\tilde{a}=a\sqrt{2k_0V}$ и $\tilde{a}^+=a^+\sqrt{2k_0V}$ (V — нормировочный объем), для которых выполняется коммутационное соотношение

$$[\tilde{a},\tilde{a}^+]=1,$$

и унитарный оператор [3]

$$D(\Phi)=\exp\{-\Phi\sqrt{2k_0V}(\tilde{a}^+-\tilde{a})\};\quad D(-\Phi)D(\Phi)=1.$$

Выполнив преобразование спинора u согласно правилу

$$u=D(\Phi)\varphi,$$

получаем уравнения для определения φ:

$$\left\{\hat{p}-m+\left[\frac{g^2Q}{2k_0V}\begin{pmatrix}\tilde{a}^+\tilde{a} & 0\\ 0 & \tilde{a}^+\tilde{a}+1\end{pmatrix}-\frac{\tau_3}{2}\right]\hat{k}\right\}\varphi=0, \qquad (7)$$

$$\left\{\frac{g^2k^2Q^2}{2k_0V}\begin{pmatrix}\tilde{a}^+\tilde{a} & 0\\ 0 & \tilde{a}^+\tilde{a}+1\end{pmatrix}+2Q(pk)+1\right\}\varphi=0. \qquad (8)$$

Введенные выше операторы $\tilde{a}$ и $\tilde{a}^+$ действуют в некотором гильбертовом пространстве состояний квантованного поля. Явный вид этих операторов зависит от выбранного представления. Однако независимо от него уравнениям (7) и (8) можно удовлетворить, положив φ равным

$$\varphi=\begin{pmatrix}F_{\tilde{n}}\;u_p\\ F_{\tilde{n}-1}u_n\end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где F_l является собственной функцией оператора $\tilde{a}^+\tilde{a}$ с собственным значением l, т. е.

$$F_l=(l!)^{-1/2}(\tilde{a}^+)^l|0>_{\tilde{a}},\quad \tilde{a}|0>_{\tilde{a}}=0,\quad l=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Подставив (9) в уравнение (8), получим

$$Q^2\frac{g^2k^2\tilde{n}}{2k_0V}+2Q(pk)+1=0.$$

Отсюда определяем Q:

$$Q = -\left[(pk) + \sqrt{(pk)^2 - \frac{g^2k^2\tilde{n}}{2k_0V}}\right]^{-1}. \qquad (10)$$

Уравнение (7) с учетом (9) и (10) сводится к уравнению Дирака в импульсном представлении:

$$(\widehat{\tilde{P}} - m)\varphi = 0,$$

в котором роль 4-импульса играет изотопический 4-вектор

$$\tilde{P}_\mu = p_\mu - \left[\frac{\tilde{n}g^2/(2k_0V)}{(pk) + \sqrt{(pk)^2 - \tilde{n}g^2k^2/(2k_0V)}} + \frac{\tau_3}{2}\right]k_\mu. \qquad (11)$$

Энергетический спектр нуклонов находим из решения уравнения

$$\tilde{P}_\mu\tilde{P}^\mu = m^2.$$

Физический смысл волновой функции (9) станет более понятным, если заметить, что действие оператора $D(\Phi)$ на φ эквивалентно сдвигу операторов $\tilde{a}^+$ и $\tilde{a}$ на величину $\sqrt{2k_0V}\Phi$, , т. е. переходу к новым операторам $a^+ + \sqrt{2k_0V}\Phi$ и $\tilde{a} + \sqrt{2k_0V}\Phi$. Состояние $D(\Phi)F_0$, уничтожаемое оператором $D(\Phi)\tilde{a}D(-\Phi) = \tilde{a} + \sqrt{2k_0V}\Phi$, является, таким образом, новым вакуумом Φ-поля с учетом сдвига. Старое вакуумное состояние Φ-поля описывается функцией F_0, для которой оператором уничтожения является оператор $\tilde{a}$. Амплитуда вероятности перехода из старого вакуума в новый определяется выражением

$$\langle 0|D(\Phi)|0\rangle = e^{-k_0V\Phi^2}.$$

Из уравнений (5) и (6) нетрудно вычислить среднее значение 4-импульса относительно старого вакуума:

$$P_\mu = p_\mu - \left[\frac{g^2\Phi^2}{(pk) + \sqrt{(pk)^2 - g^2k^2\Phi^2}} + \frac{\tau_3}{2}\right]k_\mu. \qquad (12)$$

В терминах новых возбуждений, т. е. возбуждений, отсчитываемых от нового вакуума, среднее значение 4-импульса равно, очевидно, $\tilde{P}_\mu$.

Полагая $P_\mu P^\mu = m^2$, из (12) получим

$$p^2 + \frac{k^2}{4} - m^2\left(1 + \frac{g^2\Phi^2}{m^2}\right) = \tau_3\sqrt{(pk)^2 - g^2k^2\Phi^2}.$$

В частности, при $\mathbf{p} = 0$ квадрат «энергии» нуклона во внешнем плосковолновом поле π-конденсата равен

$$p_0^2 = \left[\frac{k_0^2}{4} + m^2\left(1 + \frac{g^2\Phi^2}{m^2}\right)\right] + \frac{\mathbf{k}^2}{4} \pm$$
$$\pm\left\{k_0^2\left[\frac{k_0^2}{4} + m^2\left(1 + \frac{g^2\Phi^2}{m^2}\right)\right] - k^2\left(\frac{k_0^2}{4} + g^2\Phi^2\right)\right\}^{1/2}. \qquad (13)$$

Формула (13) согласуется с полученным в работе [1] значением энергии нуклона, если положить $k^2 = 0$.

Заметим, что спиноры u_p и u_n удовлетворяют уравнению Дирака для свободных частиц и зависят от 4-вектора P_μ: $u_p(P_\mu)$, $u_n(P_\mu)$. Однако нуклонные состояния в терминах обычных нуклонов описываются изоспинором U. Рассмотрим эти состояния в случае, когда нуклоны находятся только в поле конденсата, а квантовые возбуждения π-мезонного поля можно не учитывать. Тогда, пренебрегая слагаемым $1/(2k_0V)$, для нуклонной волновой функции имеем

$$U=\begin{pmatrix}U_p\\U_n\end{pmatrix}=N\left\{\begin{pmatrix}u_p\\u_n\end{pmatrix}+\frac{ig\Phi\gamma^5\hat{k}}{(pk)+\sqrt{(pk)^2-g^2k^2\Phi^2}}\begin{pmatrix}u_n\\u_p\end{pmatrix}\right\}, \qquad (14)$$

где скалярное произведение (pk) зависит от 4-вектора P_μ следующим образом:

$$(pk)=\{g^2k^2\Phi^2+[(Pk)+\tau_3k^2/2]^2\}^{1/2}.$$

Коэффициент N в (14) фиксируется условием нормировки изоспинора U либо условием унитарности оператора S, если спиноры u_p и u_n, являющиеся решением свободного уравнения Дирака, заранее отнормированы. В последнем случае

$$N=\left\{\frac{(pk)+\sqrt{(pk)^2-g^2k^2\Phi^2}}{2\sqrt{(pk)^2-g^2k^2\Phi^2}}\right\}^{1/2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Халилов В. Р., Перес-Фернандес В. К. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1984, 25, № 1, с. 78. [2] Мигдал А. Б. Фермионы и бозоны в сильных полях. М.: Наука, 1978. [3] Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
27.03.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 2

УДК 53:51

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КАРОТАЖА

С. Н. Давыдычева, В. Б. Гласко

(кафедра математики)

Электрический каротаж является одним из способов организации разведки доступных для бурения слоев земной коры [1]. Предметом изучения является при этом распределение проводимости в указанных слоях: $\sigma=\sigma(x)$, $x\in E_3$, а непосредственно измеряемой величиной — электрическое поле на оси каротажной скважины.

Соответствующая задача интерпретации данных наблюдений относится к числу обратных, и для ее решения необходимо: а) сформулировать математическую модель так, чтобы точным входным данным отвечало единственное решение; б) реализовать какой-либо регуляризирующий по Тихонову алгоритм, т. е. алгоритм, обеспечивающий устойчивость приближения при неточных данных [2].

В настоящей работе эти вопросы решаются для простых структур с аксиально-симметричным одномерным распределением проводимости. Для структуры со слоистым кусочно-постоянным распределением σ приведены результаты численного эксперимента.

1. В работе [3] изучалась проблема единственности для задачи электроразведки, когда источник поля находится на дневной поверхности, а геоэлектрический разрез представляется кусочно-аналитической функцией $\sigma(z)$. Доказательство единственности обратной задачи электрокаротажа для аксиально-симметричного случая $\sigma=\sigma(r, z)$ в классе кусочно-постоянных функций содержится в работе [4]. В ней показано, что в двумерном случае для единственности недостаточно значений поля на оси скважины при постоянном положении источника тока.