$$U = \begin{pmatrix} U_p \\ U_n \end{pmatrix} = N \left\{ \begin{pmatrix} u_p \\ u_n \end{pmatrix} + \frac{ig\Phi\gamma^5\hat{k}}{(pk) + \sqrt{(pk)^2 - g^2k^2\Phi^2}} \begin{pmatrix} u_n \\ u_p \end{pmatrix} \right\}, \qquad (14)$$

где скалярное произведение (pk) зависит от 4-вектора P_μ следующим образом:

$$(pk) = \{g^2k^2\Phi^2 + [(Pk) + \tau_3 k^2/2]^2\}^{1/2}.$$

Коэффициент N в (14) фиксируется условием нормировки изоспинора U либо условием унитарности оператора S, если спиноры u_p и u_n, являющиеся решением свободного уравнения Дирака, заранее отнормированы. В последнем случае

$$N = \left\{ \frac{(pk) + \sqrt{(pk)^2 - g^2k^2\Phi^2}}{2\sqrt{(pk)^2 - g^2k^2\Phi^2}} \right\}^{1/2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Халилов В. Р., Перес-Фернандес В. К. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1984, 25, № 1, с. 78. [2] Мигдал А. Б. Фермионы и бозоны в сильных полях. М.: Наука, 1978. [3] Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
27.03.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 2

УДК 53:51

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КАРОТАЖА

С. Н. Давыдычева, В. Б. Гласко

(кафедра математики)

Электрический каротаж является одним из способов организации разведки доступных для бурения слоев земной коры [1]. Предметом изучения является при этом распределение проводимости в указанных слоях: $\sigma = \sigma(x)$, $x \in E_3$, а непосредственно измеряемой величиной — электрическое поле на оси каротажной скважины.

Соответствующая задача интерпретации данных наблюдений относится к числу обратных, и для ее решения необходимо: а) сформулировать математическую модель так, чтобы точным входным данным отвечало единственное решение; б) реализовать какой-либо регуляризирующий по Тихонову алгоритм, т. е. алгоритм, обеспечивающий устойчивость приближения при неточных данных [2].

В настоящей работе эти вопросы решаются для простых структур с аксиально-симметричным одномерным распределением проводимости. Для структуры со слоистым кусочно-постоянным распределением σ приведены результаты численного эксперимента.

1. В работе [3] изучалась проблема единственности для задачи электроразведки, когда источник поля находится на дневной поверхности, а геоэлектрический разрез представляется кусочно-аналитической функцией $\sigma(z)$. Доказательство единственности обратной задачи электрокаротажа для аксиально-симметричного случая $\sigma = \sigma(r, z)$ в классе кусочно-постоянных функций содержится в работе [4]. В ней показано, что в двумерном случае для единственности недостаточно значений поля на оси скважины при постоянном положении источника тока.

В ряде случаев можно ограничиться рассмотрением одномерного распределения проводимости. Так, если предметом изучения являются породы, прилегающие к стенкам каротажной скважины вблизи погруженного в нее источника тока силы I и претерпевшие влияние бурового раствора, становится естественной модель структуры, определяемая зависимостью $\sigma=\sigma(r)$ и бесконечно протяженная по $z: |z|<<\infty$. В этом случае задача об определении σ выражается операторным уравнением

$$A\sigma=v(z),\ z\in(-\infty,\ +\infty),$$

где $v(z)=u(0,\ z)$, а электрическое поле $u(r,\ z)$ определяется при любой заданной σ условиями

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u)=0,\ (r,\ z)\neq(0,\ 0),\ |z|<\infty,\ 0\leqslant r<\infty, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=0 \text{ в силу симметрии}, \\ u(r,\ z)=\dfrac{q}{\sqrt{r^2+z^2}}+\bar{u}(r,\ z);\ q=\dfrac{I}{4\pi\sigma(0)}, \\ \bar{u}(r,\ z) \text{ — ограничена и регулярна на } \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Скажем, что $\sigma=\sigma(r)$ принадлежит классу K, если $\sigma(r)=\sigma_0$ (известная) при $r\leqslant\varepsilon$, где ε — любое заданное число, большее нуля; $\sigma(r)$ аналитична при $r\geqslant\varepsilon$, $\sigma(r)$ ограничена сверху и снизу положительными числами и $\sigma'(r)$ непрерывна.

Теорема. Заданной $v(z)$ соответствует единственная $\sigma(r)\in K$.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично [3], т. е. с использованием асимптотических представлений решения (1). В силу интегрального представления [5] $u(r,\ z)=\int\limits_0^\infty R(\lambda,\ r)\cos\lambda z d\lambda$ оказываются эквивалентными соответствия $v(z)\to\sigma(r)$ и $\psi(\lambda)\equiv\equiv R_1'(0,\ \lambda)\to S(\rho)$, где $\rho=\int\limits_0^r\sigma(\xi)\xi d\xi$; $R_1(\rho,\ \lambda)=-r\sigma(r)R_r'(r,\ \lambda)$; $S(\rho)=r\sigma(r)$.

Пусть $R_1^{(1)}(\rho,\ \lambda)$ соответствует $S_1(\rho)$, а $R_1^{(2)}(\rho,\ \lambda)$ соответствует $S_2(\rho)$ и $\omega(\rho,\ \lambda)=R_1^{(1)}(\rho,\ \lambda)-R_1^{(2)}(\rho,\ \lambda)$. Очевидно, $\omega(\rho,\ \lambda)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\omega}{d\rho^2}-\dfrac{\lambda^2}{S_1^2(\rho)}\omega=-\lambda^2\left(\dfrac{1}{S_2^2(\rho)}-\dfrac{1}{S_1^2(\rho)}\right)R_1^{(2)}(\rho,\ \lambda), \\ [\omega]_{\rho=\sigma_0\varepsilon^2/2}=0;\ [\omega_\rho']_{\rho=\sigma_0\varepsilon^2/2}=0;\ \omega|_{\rho\to\infty}=0. \end{cases}$$

Пользуясь асимптотическими представлениями фундаментальных решений [6], можно построить истокообразное асимптотическое представление для $\omega(\rho,\ \lambda)$. Отсюда следует, что

$$\omega(0,\lambda)\sim\frac{(\sigma_0\varepsilon)^{m+2}(-1)^m m!}{(2\lambda)^{m+1}}e^{-2\lambda\varepsilon}\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right),$$

где m — порядок первого ненулевого члена разложения аналитической функции $P(\rho)=1/S_2^2(\rho)-1/S_1^2(\rho)$ по степеням $(\rho-\sigma_0\varepsilon^2/2)$ при $\rho\geqslant\sigma_0\varepsilon^2/2$. Тогда если $S_1(\rho)\not\equiv S_2(\rho)$, то $\omega(0,\ \lambda)\neq0$ хотя бы при достаточно больших λ, т. е. не равно нулю тождественно. Утверждение доказано.

Тем самым есть основание полагать, что информация, получаемая при каротажном зондировании скважины с постоянным положением источника тока в ней, достаточна для однозначного определения радиального геоэлектрического разреза при слабом изменении проводимости по вертикали.

2. Другая модель структуры, связанная с задачей электрического каротажа, — это классическая слоистая среда, где искомой характеристикой является пара $(n, \mathfrak{q})$, $\mathfrak{q}=\{\sigma_1, ..., \sigma_n, z_1, ..., z_{n-1}\}$, где z_k — границы областей постоянства $\sigma(z)$.

В этом случае постановка задачи (1) с учетом скважины радиуса R с проводимостью внутри нее σ_0 дополняется очевидными условиями:

$$[u]_{z=z_k} = 0; \left[\sigma \frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=z_k} = 0; \; k = 1 \div n-1, \; r > R,$$

$$[u]_{r=R} = 0; \left[\sigma \frac{\partial u}{\partial r}\right]_{r=R} = 0; \; |z| < \infty. \tag{2}$$

Аналогично [4], используя единственность аналитического продолжения поля $u(r, z)$ с оси скважины в ее внутреннюю область, можно показать, что заданная функция $v(z)$ определяет кусочно-постоянную структуру $\sigma(z)$ единственным образом.

Поскольку наблюдаемое поле $\tilde{v}(z)$ содержит погрешность: $\rho^2_{L_2}(v, \tilde{v}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (v(z) - \tilde{v}(z))^2 \, dz \leqslant \delta^2$ при некоторой известной δ, устойчивое приближение к σ может быть получено с помощью общего регуляризирующего оператора Тихонова:

$$\sigma^{\alpha} = \arg \inf_{\sigma \in K_0} \{\rho^2_{L_2}(A\sigma, \tilde{v}) + \alpha\Omega(\sigma)\}, \tag{3}$$

где K_0 — класс кусочно-постоянных функций $\sigma(z)$, а стабилизатор аналогично [7] имеет вид $\Omega(\sigma) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k (\sigma_k - \sigma_{0k})^2 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} q_k (z_k - z_{0k})^2$; p_k, q_k, σ_{0k}, z_{0k} — числа, выбираемые так, чтобы $\min\limits_{\sigma \in K_0} \Omega(\sigma)$ достигался при характерном для данного региона значении $\sigma(z)$. Параметр α выбирается из элементов бесконечно малой последовательности $\{\alpha_s\}$ по принципу невязки [8]: $\alpha = \arg \inf\limits_{\alpha_s} |\rho^2_{L_2}(A\sigma^{\alpha_s}, \tilde{v}) - \delta^2|$.

При последовательной минимизации функционала удобно использовать алгоритм спуска по параметру [7].

Очевидно, наиболее сложным и трудоемким процессом является вычисление значений оператора A при каждой σ, получаемой в алгоритме минимизации.

Для этой цели мы использовали разностную схему на двумерной неравномерной сетке из N узлов r_i, $i=1 \div N$, и M узлов z_j, $j=1 \div M$. Бесконечная область заменялась при этом конечной прямоугольной областью. Аналогично [9, 10], заменяя в уравнениях (1)—(2) все функции $f(r, z)$ сеточными функциями $f_{ij}=f(r_i, z_j)$ и аппроксимируя производные их разностными аналогами, приходим к системе сеточных уравнений для $\bar{u}_{ij}=\bar{u}(r_i z_j)$ вида

$$a_{ij}\bar{u}_{ij} + b_{ij}\bar{u}_{ij-1} + c_{ij}\bar{u}_{ij+1} + d_{ij}\bar{u}_{i-1,j} + e_{ij}\bar{u}_{i+1,j} = f_{ij}. \tag{4}$$

Задача (4) решалась с помощью следующей итерационной схемы первого порядка. Значения $(n+1)$-го приближения $\bar{u}_{ij}^{(n+1)}$ для каждого i последовательно от $i=1$ до $i=N$ определялись методом правой прогонки по j для уравнения

$$a_{ij}\overline{u}_{ij}^{(n+1)} + b_{ij}\overline{u}_{ij-1}^{(n+1)} + c_{ij}\overline{u}_{ij+1}^{(n+1)} = f_{ij} - d_{ij}\overline{u}_{i-1,j}^{(n)} - e_{ij}\overline{u}_{i+1,j}^{(n)}$$

с граничными условиями, соответствующими условиям на бесконечности:

$$\overline{u}_{i1}^{(n+1)} = \overline{u}_{iM}^{(n+1)} = 0.$$

Вопрос о выборе разностной сетки, размеров области (в рамках допустимых) и начального приближения решается численным экспериментом.

Для задачи с параметрами $q=1$; $R=1$; $\sigma_0=10$ и различными кусочно-постоянными функциями $\sigma(z)$ наилучшая сходимость итерационного процесса достигнута в области $|z|<1{,}8\cdot 10^3$, $-9\cdot 10^{-2}\leqslant r<$ $<1{,}3\cdot 10^3$ на сетке с параметрами $M=57, N=27$, сильно неравномерной вблизи удаленных границ области ($h_i=r_{i+1}-r_i\sim i^3$; $\tau_j=z_{j+1}-$ $-z_j\sim j^3$) и равномерной в окрестности точки $(0,0)$. Было выбрано начальное приближение $\bar{u}_{ij}^{(1)}=0{,}001$.

Заметим, что процесс решения «прямой задачи» требует около 20 мин машинного времени на ЭВМ с эффективной скоростью быстродействия $\sim 2\cdot 10^5$ операций в секунду. Таким образом, рассматриваемая обратная задача может быть решена лишь на машинах высшего класса.

Однако упрощенная модель структуры в приближении бесконечно тонкой скважины ($R=0$) делает возможным явное выражение поля, что сокращает время вычисления оператора A. В этом случае

$$v(z) = \int_0^\infty [A_k(\lambda)\, e^{-\lambda|z|} + B_k(\lambda)\, e^{\lambda|z|}]\, d\lambda,\ \ z_{k-1} < z \leqslant z_k,\ \ k = 1 \div n, \qquad (5)$$

где $z_0=-\infty$, $z_n=+\infty$. Коэффициенты A_k, B_k определяются рекуррентными соотношениями:

$$R_n = 0;\ \ R_{k-1} = \frac{p_k + R_k e^{2\lambda z_k}}{e^{-2\lambda z_k} + p_k R_k},\ \ k = n \div 2,$$

$$A_1 = q;\ \ A_k = A_{k-1}\frac{1 - p_k R_k e^{2\lambda z_k}}{1 - p_k},\ \ k = 2 \div n,$$

$$B_k = A_k R_k,\ \ k = 1 \div n,$$

где $p_k=(\sigma_{k-1}-\sigma_k)/(\sigma_{k-1}+\sigma_k)$. Интеграл (5) вычислялся по методу Симпсона [11] с заменой верхнего предела интегрирования конечным значением. На сетке, сопоставимой с выбранной выше, это требует в целом около 1 мин времени на ЭВМ упомянутого класса при $n=3$.

Специфика задачи каротажа делает естественным следующий итерационный процесс определения параметров структуры. Полагая σ_1 известной, определяем параметры одного или двух нижележащих слоев, считая последний слой бесконечно протяженным. Затем передвигаем источник тока в следующий слой в глубину, помещая его вблизи нижней границы слоя. Повторяем процесс. Таким образом, не прибегая к большим затратам времени счета, можно определить параметры любого числа слоев.

Численный эксперимент показал, что для удовлетворительного восстановления параметров слоистой модели с помощью алгоритма (3), (5) необходимо обеспечить точность измерений поля не менее

15%. Если же определяются только величины σ_k, $k=2\div n$ при известных z_k, допустимая ошибка измерения поля может достигать 30%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Альпин Л. М. К теории электрического каротажа буровых скважин. М.—Л.: Гостопиздат, 1938. [2] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. [3] Тихонов А. Н. ДАН СССР, 1949, **69**, с. 797. [4] Друскин В. Л. Изв. АН СССР. Физика Земли, 1982, № 1, с. 72. [5] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. [6] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. [7] Тихонов А. Н., Гласко В. Б., Кулик Н. И. ЖВМ и МФ, 1972, **12**, № 1, с. 139. [8] Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. [9] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. [10] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. [11] Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
05.04.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 2

УДК 53:51

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРОБЛЕМЕ НЕОДНОЗНАЧНОСТЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ КВАНТОВАНИИ ФЕРМИОННЫХ СИСТЕМ

А. Е. Пухов

(НИИЯФ)

1. Хорошо известно, что при квантовании классической системы возникает проблема неоднозначности, связанная с некоммутирующим характером квантовых переменных. Эта проблема проявляется как при выборе предпочтительных классических наблюдаемых, скобки Пуассона которых заменяются коммутаторами, так и при расстановке некоммутирующих операторов в гамильтониане. Под процедурой квантования понимается некое предписание, которое устраняет эту неоднозначность. Основное требование к такому предписанию — его инвариантность по отношению к заменам (в том числе и нелинейным) лагранжевых координат.

В случае обычных (бозевских) классических систем с невырожденным действием и квадратичным по скоростям лагранжианом процедура квантования в упомянутом выше смысле была изучена в работах Де Витта [1, 2].

Данная работа посвящена проблеме квантования фермионных систем. В работе показано, что лагранжиан фермионной системы с помощью нелинейного преобразования грассмановских образующих всегда может быть приведен к некоему каноническому виду. При этом различные наборы канонических образующих связаны линейными преобразованиями. На основе этого предложен способ однозначного построения квантовой теории по классическому лагранжиану.

2. Опишем построение предпочтительных (канонических) систем образующих. Пусть $\{x^1, ..., x^{2n}\}$ — вещественные образующие грассмановой алгебры, а лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{i}{2}\dot{x}^i g_i(x) - H(x).$$

Условимся использовать греческие буквы $\gamma(x)$, $\varepsilon(x)$, ... для обо-