15%. Если же определяются только величины σ_k, $k=2\div n$ при известных z_k, допустимая ошибка измерения поля может достигать 30%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Альпин Л. М. К теории электрического каротажа буровых скважин. М.—Л.: Гостопиздат, 1938. [2] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. [3] Тихонов А. Н. ДАН СССР, 1949, **69**, с. 797. [4] Друскин В. Л. Изв. АН СССР. Физика Земли, 1982, № 1, с. 72. [5] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. [6] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. [7] Тихонов А. Н., Гласко В. Б., Кулик Н. И. ЖВМ и МФ, 1972, **12**, № 1, с. 139. [8] Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. [9] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. [10] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. [11] Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
05.04.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 2

УДК 53:51

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРОБЛЕМЕ НЕОДНОЗНАЧНОСТЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ КВАНТОВАНИИ ФЕРМИОННЫХ СИСТЕМ

А. Е. Пухов

(НИИЯФ)

1. Хорошо известно, что при квантовании классической системы возникает проблема неоднозначности, связанная с некоммутирующим характером квантовых переменных. Эта проблема проявляется как при выборе предпочтительных классических наблюдаемых, скобки Пуассона которых заменяются коммутаторами, так и при расстановке некоммутирующих операторов в гамильтониане. Под процедурой квантования понимается некое предписание, которое устраняет эту неоднозначность. Основное требование к такому предписанию — его инвариантность по отношению к заменам (в том числе и нелинейным) лагранжевых координат.

В случае обычных (бозевских) классических систем с невырожденным действием и квадратичным по скоростям лагранжианом процедура квантования в упомянутом выше смысле была изучена в работах Де Витта [1, 2].

Данная работа посвящена проблеме квантования фермионных систем. В работе показано, что лагранжиан фермионной системы с помощью нелинейного преобразования грассмановских образующих всегда может быть приведен к некоему каноническому виду. При этом различные наборы канонических образующих связаны линейными преобразованиями. На основе этого предложен способ однозначного построения квантовой теории по классическому лагранжиану.

2. Опишем построение предпочтительных (канонических) систем образующих. Пусть $\{x^1, ..., x^{2n}\}$ — вещественные образующие грассмановой алгебры, а лагранжиан имеет вид

$$L=\frac{i}{2}\dot{x}^i g_i(x)-H(x).$$

Условимся использовать греческие буквы $\gamma(x)$, $\varepsilon(x)$, ... для обозначения нечетных вещественных функций x, не содержащих линейных по x членов. Тогда $g_i(x)$ представляется в виде

$$g_i(x) = F_{ij}x^j + \gamma_i(x).$$

Основной результат данной работы составляет следующая теорема.

Теорема. Пусть $(F_{ij}+F_{ji})$ — невырожденная положительная форма. Тогда существует, притом единственная, с точностью до линейного преобразования система образующих $y^i(x)$, для которой

$$L = \frac{i}{2}\dot{y}^i F_{ij} y^j - H(y), \tag{1}$$

т. е. кинетический член билинеен по динамическим переменным.

Доказательство. Условие того, что в системе координат y^i лагранжиан L имеет форму (1), записывается в виде

$$\dot{y}^i \frac{\partial x^k(y)}{\partial y^i} g_k(x(y)) = \dot{y}^i F_{ij} y^j.$$

Вследствие произвольности $\dot{y}^i$ и четности числа образующих получим

$$\frac{\partial x^k}{\partial y^i} g^k(x(y)) = F_{ij} y^j. \tag{2}$$

Нужно доказать, что уравнение (2) имеет ровно одно решение вида $x^k(y) = y^k + \varepsilon^k(y)$. Уравнение (2) приводит к следующему уравнению для $\varepsilon^k(y)$:

$$F_{ij}\varepsilon^j(y) + \frac{\partial \varepsilon^k(y)}{\partial y^i} F_{kj} y^j = -\Big\{\gamma_i(y+\varepsilon(y)) + \\ + \frac{\partial \varepsilon^k(y)}{\partial y^i} F_{kj}\varepsilon^j(y) + \frac{\partial \varepsilon^k(y)}{\partial y^i}\gamma_k(y+\varepsilon(y))\Big\}. \tag{3}$$

Если линейный оператор, стоящий в левой части (3), невырожден, то уравнение (3) можно решать итерациями, как это принято в работах по суперматематике [3]. При этом существование и единственность решения гарантируются. Покажем, что если

$$F_{ij}\varepsilon^j + \frac{\partial \varepsilon^k}{\partial y^i} F_{kj} y^j = 0, \tag{4}$$

то $\varepsilon^k(y) = 0$. Без ограничения общности будем считать, что

$\varepsilon^k(y) = T^k_{i_1\ldots i_l} y^{i_1}\cdots y^{i_l}$, где $l \geqslant 3$, а $T^k_{i_1\ldots i_l}$ антисимметричен по нижним индексам. Уравнение (4) переписывается в виде

$$(F_{ij} + F_{ji})\varepsilon^j + \frac{\partial}{\partial y^i}(\varepsilon^k F_{kj} y^j) = 0, \tag{5}$$

откуда следует $\varepsilon^j(F_{ij}+F_{ji})y^i = (1+l)(\varepsilon^k \cdot F_{kj}y^j)$.

Подставляем последнее равенство в (5) и, вводя обозначение $G_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij}+F_{ji})$, получим $G_{ij}\varepsilon^j + \frac{1}{l+1}\frac{\partial}{\partial y^i}(\varepsilon^k G_{kn} y^n) = 0$. Это равенство означает, что $T_{i_0 i_1\ldots i_l} = G_{i_0 j} T^j_{i_1\ldots i_l}$ — полностью антисимметричный тензор. Пользуясь антисимметричностью $T_{i_0\ldots i_l}$, из (5) получим

$$-(l-1)T_{i_0\ldots i_l}=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k(F_{ji_k}-F_{i_kj})T^{j}_{i_0,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots i_l}=0,$$

$$-(l-1)T_{i_0\ldots i_l}G^{i_0j_0}\ldots G^{i_lj_l}T_{j_0\ldots j_l}=$$
$$=(l+1)(F_{i_0j_0}-F_{j_0i_0})T^{i_0}_{i_1\ldots i_l}G^{i_1j_1}\ldots G^{i_lj_l}T^{j_0}_{j_1\ldots j_l}=0.$$

Здесь G^{ij} — ковариантная форма, обратная к G_{ij}. Вследствие положительности G^{ij} левая часть последнего уравнения зануляется только при $T=0$. Итак, оператор в левой части (3) обратим, поэтому (3) имеет ровно одно решение. Теорема доказана.

Таким образом, показано, что существует выделенный класс систем образующих, связанных друг с другом линейными преобразованиями, для которых кинетический член в лагранжиане имеет наиболее простой вид (1). Эти системы образующих, которые будем называть каноническими, разумно использовать в качестве предпочтительных наблюдаемых для квантования. При квантовании вещественные образующие грассмановой алгебры x^i переходят в эрмитовы операторы $\hat{x}^i$. Скоба Пуассона заменяется на антикоммутационные соотношения

$$[\hat{x}^i,\ \hat{x}^j]_+=\hat{x}^i\hat{x}^j+\hat{x}^j\hat{x}^i=hG^{ij}. \qquad (6)$$

Соотношения (6), очевидно, ковариантны по отношению к выбору той или иной системы канонических образующих. Для этих соотношений может быть доказан аналог теоремы Стоуна фон Неймана: все неприводимые представления соотношений (6) унитарно эквивалентны [4].

3. В предыдущем пункте было показано, как ковариантным образом построить набор предпочтительных наблюдаемых. Покажем теперь, что и для произвольной наблюдаемой $f(x)$ можно установить правила квантования, не зависящие от выбора системы лагранжевых координат. С этой целью перейдем к какому-либо каноническому набору образующих $\{x_i\}$ и представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=\sum_n T^{(n)}_{i_1\ldots i_n}x^{i_1}\ldots x^{i_n},$$

где $T^{(n)}_{i_1\ldots i_n}$ — антисимметричный тензор ранга n. Положим по определению

$$\widehat{f}(x)=\sum_n T^{n}_{i_1\ldots i_n}\widehat{x}^{i_1}\ldots\widehat{x}^{i_n}. \qquad (7)$$

Формула (7) является аналогом симметричного (вейлевского) квантования для фермионных систем. Очевидно, квантование (7) инвариантно относительно линейных преобразований образующих и, следовательно, относительно выбора канонической системы образующих.

Таким образом, установлены правила построения квантовой теории по классическому лагранжиану, не зависящие от выбора лагранжевой системы координат. Отметим также, что при описанной выше процедуре квантования любая симметрия классического лагранжиана приводит к квантовому закону сохранения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] De Witt B. Phys. Rev., 1952, 35, p. 653. [2] De Witt B. Rev. Mod. Phys., 1957, 29, p. 377. [3] Лейтес Д. А. Успехи матем. наук, 1980, 35, № 1, с. 3. [4] Iordan P., Wigner E. Zeitschr. für Phys., 1928, 47, p. 631.

Поступила в редакцию
13.06.83