ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ — НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОБНАРУЖИМОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ

Ю. И. Воронцов, Ф. Я. Халили

(кафедра физики колебаний)

Типичной задачей экспериментальной физики является задача различения путей эволюции системы (например, при обнаружении взаимодействия систем, при обнаружении или различении уровней интенсивности внешнего поля). Процесс различения путей эволюции состоит из трех этапов. На первом этапе готовится некоторое состояние системы. Затем происходит эволюция системы. На третьем этапе производится измерение, по результатам которого принимается то или иное решение. Ошибка различения путей эволюции зависит от начального состояния системы. Ниже исследуются общие закономерности, связывающие ошибку различения с начальным состоянием системы.

Ограничимся анализом различения двух возможных путей эволюции. Допустим, что на одном из путей оператор Гамильтона системы равен $\hat{\mathscr{H}}_0$, на другом — $\hat{\mathscr{H}}_1$, а соответствующие операторы эволюции равны $\hat{O}_0(t)$ и $\hat{O}_1(t)$. Будем рассматривать только чистые начальные состояния. Начальное состояние $|\psi_0\rangle$ в процессе эволюции может превратиться либо в состояние $\hat{O}_0|\psi_0\rangle$, либо в состояние $\hat{O}_1|\psi_1\rangle$. Перекрытие этих состояний характеризуется скалярным произведением

$$\gamma=\langle\psi_0|\hat{O}_0^+\hat{O}_1|\psi_0\rangle. \tag{1}$$

Средняя вероятность ошибки различения двух состояний

$$P=\zeta_0\theta_0+\zeta_1(1-\theta_d)$$

(ζ_0, ζ_1 — априорные вероятности состояний, θ_0, θ_d — вероятности ложной тревоги и обнаружения соответственно) связана со значением γ (см. (1)) следующим образом [1]:

$$P\geqslant\frac{1}{2}[1-(1-4|\gamma|^2\zeta_0\zeta_1)^{1/2}]. \tag{2}$$

Знак равенства в соотношении (2) будет иметь место в том случае, если производимые измерения оптимальны и точны.

Оператор $\hat{R}\equiv\hat{O}_0^+\hat{O}_1$ подобен оператору рассеяния, используемому при анализе движения системы в представлении взаимодействия. Он удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\frac{d\hat{R}}{dt}=\hat{\mathscr{H}}_i^0\hat{R},$$

где

$$\hat{\mathscr{H}}_i^0(t)\equiv\hat{U}_0^+(\hat{\mathscr{H}}_1-\hat{\mathscr{H}}_0)\hat{U}_0. \tag{3}$$

Представив оператор рассеяния в виде

$$\hat{R}=\exp(i\hat{\varphi}), \tag{4}$$

получим

$$|\gamma|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\varphi)\, d\Phi(\varphi), \tag{5}$$

где $\Phi(\varphi)$ — функция распределения вероятностей для собственных значений оператора $\hat{\varphi}$, соответствующая заданному начальному состоянию $|\psi_0\rangle$.

Очевидно, что существует множество начальных состояний, таких, что конечные состояния, соответствующие разным путям эволюции, будут взаимно ортогональными, т. е. будет $|\gamma|=0$ и соответственно $P=0$. Но различным начальным состояниям соответствуют различные функции распределения и различные моменты случайной величины φ. Ниже показано, что второй момент σ_φ^2 связан с энергией взаимодействия систем. Поэтому логично поставить вопрос: каким может быть минимальное значение σ_φ при заданном значении $|\gamma|$?

В приложении 1 показано, что необходимым условием безошибочного различения двух путей эволюции системы является выполнение неравенства

$$\sigma_\varphi \geqslant \pi/2; \tag{6}$$

если же это условие не выполняется, то

$$|\gamma| = \cos\sigma_\varphi > 0. \tag{7}$$

Заметим, что ошибки различения определяются только дисперсией и не зависят от среднего значения φ.

Оператор $\hat{\varphi}$ однозначно связан с оператором $\hat{\mathscr{H}}_i^0$. Если последний автокоммутирует, т. е. для любого $\hat{Q}$

$$[[\hat{\mathscr{H}}_i^0(t),\ \hat{\mathscr{H}}_i^0(t')],\ \hat{Q}] = 0, \tag{8}$$

то (см. приложение 2)

$$\hat{\varphi} = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t \hat{\mathscr{H}}_i^0(t')\, dt'. \tag{9}$$

Учтя соотношение (9), неравенство (6) можно записать в следующем виде:

$$\Delta\bar{\mathscr{H}}_i^\tau \cdot \tau \geqslant (\pi/2)\,\hbar, \tag{10}$$

где $\bar{\mathscr{H}}_i^\tau \equiv \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} \hat{\mathscr{H}}_i^0(t')\, dt'$, $\Delta\bar{\mathscr{H}}_i^\tau$ есть неопределенность средней во времени разности интегралов энергии системы на различных путях эволюции. В случае задачи об обнаружении взаимодействия оператор $\hat{\mathscr{H}}_i$ будет соответствовать гамильтониану взаимодействия.

Ошибка различения может быть равной нулю при конечных значениях σ_φ только в том случае, если операторы $O_0|\psi_0\rangle\langle\psi_0|O_0^+$ и $O_1|\psi_0\rangle\langle\psi_0|O_1^+$ являются операторами ортогонального проектирования. В противном случае ошибка различения может стремиться к нулю лишь асимптотически при $\sigma_\varphi \to \infty$.

Рассмотрим чистые состояния, в которых плотность распределения вероятностей для φ может быть представлена в виде

$$w(\varphi) = a\exp\left\{-\frac{\varphi^2}{2\sigma^2}\right\}(1 + f(\varphi)), \tag{11}$$

где $f(\varphi)$ — полином конечной степени, a — нормирующий множитель. Если $\sigma^2 \ll 2$, то из (5) получим

$$|\gamma|^2 \approx \exp(-\sigma^2) \approx 1-\sigma^2, \tag{12}$$

причем $\sigma^2 \approx \sigma_\varphi^2$. В случае гауссовского распределения ($f(\varphi)=0$) $|\gamma|^2 = \exp(-\sigma^2)$ при любых значениях σ. Следовательно, при $\sigma^2 < 1$ все распределения вида (11) дают ошибку обнаружения, близкую к ошибке при гауссовском распределении и равную в наименее благоприятном случае, когда $\zeta_0 = \zeta_1 = 1/2$,

$$P = \frac{1}{2}(1-\sigma_\varphi). \tag{13}$$

Распределение вида (11) имеет место, например, при действии классической силы на гармонический осциллятор в когерентном состоянии ($f(\varphi)=0$), в состоянии с заданной энергией ($1+f(\varphi)$ — полином Эрмита), в сжатом состоянии [2] ($f(\varphi)=0$).

Из соотношения (12) видно, что любые чистые гауссовские состояния, которым соответствует одно и то же значение σ_φ, приводят к одной и той же ошибке различения. Состояния с минимальным произведением неопределенностей координаты и импульса в этом смысле не являются выделенными.

Применим соотношение (7) для определения минимальной ошибки обнаружения классического воздействия на систему. В случае классического силового воздействия $F(t)$ будет справедливо

$$\widehat{\varphi} = \frac{1}{\hbar}\int_0^t F(t')\,\hat{x}^0(t')\,dt'. \tag{14}$$

Здесь $F(t)$ — заданная c-числовая функция, $\hat{x}^0(t)$ — оператор координаты в представлении взаимодействия.

Величина σ_φ зависит от неопределенности координаты, формы силы и момента ее действия. Из соотношения (14) можно видеть, как следует согласовать форму собственных движений в системе с формой силы. В простейшем случае, когда в интервале действия силы $[t_0, t_0+\tau]$ силу и координату можно считать постоянными, будет

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\hbar}F_0\tau\Delta x(t_0). \tag{15}$$

Ошибка обнаружения силы зависит от начального состояния системы и точности измерений; минимальное значение ошибки определяется соотношениями (6), (7). Для чистых начальных состояний вида (11) при точных измерениях ошибка обнаружения малой силы ($\sigma_\varphi \leqslant 1$) определяется соотношением (13). Когда $\sigma_\varphi = 1/2$, то можно обнаружить с ошибкой $P \approx 0{,}15$ импульсную силу $F_0 = \hbar(\Delta x(t_0)\cdot\tau)^{-1}$.

У осциллятора в когерентном состоянии $\Delta x = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$, поэтому $F_0 \approx \tau^{-1}\sqrt{\hbar m\omega/2}$ (m — масса, ω — частота осциллятора). У осциллятора в состоянии с заданной энергией ($E_0 = (n+1/2)\hbar\omega$) неопределенность координаты равна $\Delta x = \sqrt{(n+1/2)\hbar/(m\omega)}$. Следовательно, при $n \gg 1$ $F_0 \approx \tau^{-1}\sqrt{\hbar m\omega/n}$.

Для случая обнаружения малой силы ($\sigma_\varphi \leqslant 1$) подход, аналогичный развитому в настоящей работе, был рассмотрен в [3]; два последних соотношения были получены другим путем в работах [4, 5].

Если в качестве пробного тела используется свободная частица с расплывающимся волновым пакетом, то ошибка обнаружения силы будет тем меньше, чем позже момент действия, т. е. чем больше $\Delta x(t_0)$.

Соотношение $F_0\tau \approx \hbar/(\Delta x(t_0))$ принципиально отличается от соотношения $F_0\tau = \sqrt{\hbar m/\tau}$, полученного в работе [5] как один из пределов чувствительности к силе по отклику свободной частицы. Причина различия лежит в предполагаемых процедурах измерения. В [5] считалось, что измеряется только координата свободной частицы. В настоящей работе предполагается измерение некоторой оптимальной наблюдаемой, которая задается соотношением [1]

$$\hat{A} = \hat{U}_1 |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \hat{U}_1^+ - \hat{U}_0^+ |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \hat{U}_0^+.$$

Примерами параметрического воздействия, удовлетворяющего условию (8), являются: а) изменение массы свободной частицы, изменение индуктивности витка; б) изменение частоты осциллятора при условии, что его волновое сопротивление остается постоянным. В случае достаточно кратковременного воздействия оператор рассеяния может быть записан в форме (9), даже если соотношение (8) не выполняется. Например, действие на свободную частицу неоднородного поля, в котором $\hat{\mathscr{H}}_i = k\hat{x}^2/2$, можно описать приближенно оператором рассеяния вида (9), если $(\bar{k}^\tau/m)\tau^2 \ll 1$ ($\bar{k}^\tau$ — среднее за время действия τ значение жесткости).

Проведенный анализ позволяет также ответить на вопрос об обмене энергией между исследуемой системой и источником возмущения. После параметрического воздействия при соблюдении условия (8) энергия системы будет равна энергии до взаимодействия. В случае силового воздействия энергия тела в общем случае меняется, но величина изменения не связана однозначно с σ_φ. Например, при $\int F(t)dt = 0$ изменение энергии свободной частицы будет равно нулю, но действие силы может быть обнаружено, так как $\int F(t)\hat{x}^0(t)dt \neq 0$. В этом случае энергия связи целиком возвращается в источник возмущения.

Основной результат данной работы заключается в установлении следующей общей закономерности: два пути эволюции системы могут быть различимы только в том случае, если неопределенность разности квантовых фаз (σ_φ) на возможных путях эволюции больше единицы; от среднего значения разности фаз ошибка различения не зависит. При обнаружении взаимодействия систем это условие можно связать с неопределенностью энергии связи (см. соотношение (10)).

Возможно такое начальное состояние системы, при котором конечные состояния на различных путях эволюции будут ортогональными при минимально возможном значении $\sigma_\varphi = \pi/2$.

Приложение 1.

Пусть оператор $\hat{\varphi}$ имеет непрерывный спектр собственных значений (обобщение на случай дискретного или смешанного спектров не представляет труда). В этом случае можно ввести плотность вероятности $w(\varphi) = d\Phi/d\varphi$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\varphi)\, d\varphi = 1, \tag{1.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Delta\varphi)^2 w(\varphi)\, d\varphi = \sigma_\varphi^2, \tag{1.2}$$

$$|\gamma|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} w(\varphi) \exp(i\varphi)\, d\varphi \right|^2 \equiv \left| \int_{-\infty}^{\infty} w(\varphi) \exp(i\Delta\varphi)\, d\varphi \right|^2,$$

где $\Delta\varphi=\varphi-\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi w(\varphi)\,d\varphi$. Симметризовав распределение $w(\varphi)$ относительно точки $\bar{\varphi}$, можно уменьшить $|\gamma|$, не изменяя значений (1.1) и (1.2); далее предполагаем, что $w(\varphi)$ является симметризованным.

При $|\gamma|=0$ распределение вида

$$w(\varphi)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(\Delta\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\Delta\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{1.3}$$

дает для σ_φ значение $\pi/2$. Покажем, что получить меньшее значение σ_φ при $|\gamma|=0$ невозможно. Для этого найдем условный экстремум выражения

$$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\lambda(\Delta\varphi)^2+\cos\Delta\varphi)\,w(\varphi)\,d\varphi$$

(λ — множитель Лагранжа) при условии (1.1). Поскольку $I\geqslant\lambda\varphi_0^2+$ $+\cos\varphi_0$, где φ_0 — точка минимума функции $\lambda x^2+\cos x$, причем равенство достигается при

$$w(\varphi)=\frac{1}{2}[\delta(\Delta\varphi-\varphi_0)+\delta(\Delta\varphi+\varphi_0)], \tag{1.4}$$

то (1.4) является оптимальным распределением. При этом $\sigma_\varphi=\varphi_0$, $\gamma=\cos\sigma_\varphi$. При $\sigma_\varphi<\pi/2$ будет $\gamma>0$; при $\sigma_\varphi=\pi/2$ будет $\gamma=0$ и распределение (1.4) совпадает с (1.3).

Приложение 2.

Покажем, что если некоторый явно зависящий от времени оператор $\hat{P}(t)$ удовлетворяет условию

$$[[\hat{P}(t),\quad \hat{P}(t')],\quad \hat{Q}]=0 \tag{2.1}$$

при произвольном $\hat{Q}$, то решение дифференциального уравнения

$$\dot{\hat{R}}(t)=\hat{P}(t)\hat{R}(t) \tag{2.2}$$

можно записать в виде

$$\hat{R}(t)=\exp\left(\int\limits_0^t\hat{P}(t')\,dt'\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^t dt'\int\limits_0^{t'}dt''\,[\hat{P}(t'),\ \hat{P}(t'')]\right)\cdot\hat{R}(0). \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{\tau}(\hat{R}(t+\tau)-\hat{R}(t))\,|_{\tau\to0}=\hat{P}(t)\hat{R}(t).$$

Отсюда следует, что

$$\hat{R}(t+\tau)=(1+\tau\hat{P}(t))\,\hat{R}(t)\,|_{\tau\to0}=\exp(\tau\hat{P}(t))\,|_{\tau\to0}\cdot\hat{R}(t).$$

Поэтому

$$\hat{R}(t)=\prod_{k=0}^{N}\exp(\tau\hat{P}(k\tau))\cdot\hat{R}(0)\,|_{\tau\to0}, \tag{2.4}$$

где $N=[t/\tau]-1$. Применяя к (2.4) многократно формулу (3.20) из [6], получим

$$\hat{R}(t)=\exp\left(\tau\sum_{k=0}^{N}\hat{P}(k\tau)+\frac{\tau^2}{2}\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{k}[\hat{P}(k\tau),\ \hat{P}(l\tau)]\right)\Big|_{\tau\to0}\cdot\hat{R}(0). \tag{2.5}$$

При $\tau\to0$ выражение (2.5) переходит в (2.3).

Если $\hat{P}(t)=(i\hbar)^{-1}\hat{\mathcal{H}}_i^0(t)$ (см. (3)) и $\hat{R}(0)=\hat{1}$, то $R(t)$ представляет собой оператор рассеяния (4), причем

$$\hat{R}(t)=\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_0^t \hat{\mathcal{H}}_i^0(t')dt'\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\hbar^2}\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\,[\hat{\mathcal{H}}_i^0(t'),\ \hat{\mathcal{H}}_i^0(t'')]\right). \tag{2.6}$$

В силу (2.1) второй сомножитель в (2.6) можно опустить, поскольку во все окончательные выражения $\hat{R}(t)$ входит только в комбинациях с $\hat{R}^+(t)$ вида $\hat{R}\hat{Q}\hat{R}^+$ либо $\hat{R}^+\hat{Q}\hat{R}$, а $[\hat{\mathcal{H}}_1^0(t'),\ \hat{\mathcal{H}}_1^0(t'')]$ — антиэрмитов оператор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. М., 1979, с. 128. [2] Caves C. M. Phys. Rev. D, 1981, 23, p. 1693. [3] Халили Ф. Я. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1983, 24, № 3, с. 17. [4] Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. М., 1970. [5] Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И. УФН, 1974, 114, с. 41. [6] Люиселл У. Излучения и шумы в квантовой электронике. М., 1972, с. 149.

Поступила в редакцию
21.03.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 3

УДК 539.12.01:539.124

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ СДВИГ МАССЫ ЭЛЕКТРОНА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Ч. Жуковский, П. Г. Мидодашвили, П. А. Эминов

(кафедра теоретической физики)

1. **Введение.** Температурные эффекты в квантовой теории поля широко обсуждаются в литературе. В работах [1—2] рассматривалась возможность восстановления спонтанно-нарушенной симметрии в механизме Хиггса при высоких температурах. Температурные эффекты могут играть важную роль (см., например, [3]) при рассмотрении ряда астрофизических и космологических проблем. В работах [4—6] развивается концепция «нагретого вакуума» и его влияние на сдвиг массы свободного электрона.

В настоящей работе вычисляется сдвиг энергии электрона, движущегося в постоянном внешнем магнитном поле на фоне «температурного вакуума».

2. **Температурный сдвиг массы электрона в постоянном магнитном поле.** Обобщением недавно предложенного в работах [5—7] определения сдвига массы электрона при конечных температурах в случае наличия постоянного поля является следующее выражение для сдвига энергии частицы:

$$\Delta E_\beta=\frac{1}{Vt}S_{nn}.$$

В низшем порядке по полю излучения S_{nn} определяется формулой

$$S_{nn}=\int\bar{\psi}_n(x')\,S_T(x',\ x'')\,\psi_n(x'')\,d^4x'\,d^4x''. \tag{1}$$

Здесь $\psi_n(x)$ — волновая функция электрона в постоянном магнитном