[8] Попов В. С. ЖЭТФ, 1971, **61**, с. 1334; ЖЭТФ, 1972, **63**, с. 1586. Маринов М. С., Попов В. С. Ядерная физика, 1972, **15**, с. 1271. [9] Schwinger I. Phys. Rev., 1951, **82**, p. 662.

Поступила в редакцию
20.06.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 3

УДК 517.9:535.4

ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ВОЛН В СЖИМАЕМОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

С. А. Габов, Х. Марин Антунья (Куба)

(кафедра математики)

Первое строгое математическое изучение задач динамики вращающихся жидкостей было начато С. Л. Соболевым [1] и продолжено В. Н. Масленниковой [2], а также рядом других авторов [3—6]. Здесь мы рассмотрим одну нестационарную задачу дифракции волн во вращающейся сжимаемой жидкости и изучим поведение ее решения при больших временах.

1°. Рассмотрим идеальную сжимаемую однородную жидкость, которая вращается с угловой скоростью $\alpha/2$ вокруг вертикальной оси. Отнесем малые движения этой жидкости к декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3), которая вращается вместе с жидкостью, причем ось x_3 направим вдоль оси вращения. Малые колебания рассматриваемой жидкости принято описывать системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}+[\boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{v}]+\nabla p=0,\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}p+\operatorname{div}\mathbf{v}=0. \tag{1}$$

При записи (1) предполагалось, что плотность жидкости равна единице, и использовались следующие обозначения: $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости частиц жидкости, p — динамическое давление, c — числовой параметр, имеющий смысл скорости звука в рассматриваемой жидкой среде. Через $\boldsymbol{\alpha}=(0, 0, \alpha)$ обозначен так называемый вектор Кориолиса.

Определение. Под двумерными движениями вращающейся сжимаемой жидкости будем понимать такие ее движения, для которых величины $\mathbf{v}$ и p оказываются не зависящими от одной из пространственных переменных x_1 или x_2, для определенности, скажем, x_2, т. е. $(\partial/\partial x_2)\mathbf{v}=0$ и $(\partial/\partial x_2)p=0$.

Система уравнений (1) для случая двумерных движений может быть переписана в следующем виде:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}-\alpha v_2+\frac{\partial}{\partial x_1}p=0,\quad \frac{\partial v_2}{\partial t}+\alpha v_1=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}v_3+\frac{\partial}{\partial x_3}p=0,\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0. \tag{2}$$

Из второго уравнения системы (2) следует, что компонента v_2 вектора скорости однозначно определяется через v_1 и свое начальное зна-

чение при $t=0$ и может быть исключена из первого уравнения системы (2), которое тогда принимает вид

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}+\alpha^2 v_1+\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_1}p=0.$$

Использовав это соотношение, а также последние два уравнения системы (2), можно путем исключения прочих функций получить следующее дифференциальное уравнение для динамического давления:

$$\mathfrak{M}[p]\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p-\Delta_2 p+\frac{\alpha^2}{c^2}p\right]-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}p=0. \qquad (3)$$

Здесь и ниже Δ_2 — лапласиан по переменным x_1 и x_3. Можно также показать, что и компоненты вектора $\mathbf{v}$ удовлетворяют тому же уравнению, т. е. $\mathfrak{M}[v_j]=0$, $j=1, 2, 3$. Тем самым интегрирование системы (2) сводится к интегрированию уравнения (3).

2°. Для дальнейшего оказывается полезным знание фундаментального решения уравнения (3), точнее говоря, функции $\mathscr{E}_2(x, t)$, $x=(x_1, x_3)$, удовлетворяющей в обобщенном смысле уравнению

$$\mathfrak{M}[\mathscr{E}_2]=\delta(x)\delta(t),$$

где δ обозначает известную дельта-функцию Дирака.

Фундаментальное решение $\mathscr{E}_2(x, t)$ может быть построено с использованием преобразования Лапласа по времени и имеет следующий вид:

$$\mathscr{E}_2(x, t)=\beta(t)*W(x, t), \qquad (4)$$

где $*$ обозначает свертку по времени, а функции $\beta(t)$ и $W(x, t)$ определены формулами

$$\beta(t)=\int_0^t J_0(\alpha\tau)\,d\tau,$$

$$W(x, t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\theta(t-|x|/c)}{\sqrt{t^2-|x|^2/c^2}}\cos\left(\alpha\frac{x_1}{|x|}\sqrt{t^2-|x|^2/c^2}\right) \qquad (5)$$

и $|x|^2=x_1^2+x_3^2$. Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка, а $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Следует отметить, что функция $W(x, t)$, входящая в формулу (4), является наряду с фундаментальным решением также обобщенным сингулярным решением уравнения (3). Всюду ниже для простоты записи формул будем считать, что $c=1$.

3°. Пусть во вращающейся сжимаемой жидкости, занимающей все пространство R^2, находится полубесконечная стенка (полуплоскость) $\Gamma\equiv\{(x_1, x_3)\in R^2: x_1=0, x_3\geqslant 0\}$. Предположим, что на эту стенку Γ из бесконечности ($x_3<0$) вдоль оси x_3 набегает плоская волна вида $u_0=\theta(t-x_3)\exp\{i\gamma(t-x_3)\}$, $\gamma>0$, падающая на нее под нулевым углом (скользящее падение). Изучим процесс дифракции этой волны на ребре стенки Γ, предполагая, что полное волновое поле должно обращаться в нуль на стенке Γ.

Обозначим через $U(x, t)=u_0(x, t)+u(x, t)$ полное волновое поле, складывающееся из набегающей плоской волны u_0 и дифракционного поля, описываемого функцией $u(x, t)$.

Математически рассматриваемая задача для дифракционного поля ставится следующим образом:

$$\mathfrak{M}_1[u]\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta_2 u+\alpha^2 u\right]-\alpha^2 u_{x_3x_3}=0,\ x\in R^2\setminus\Gamma,$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t)|_{t<0} = 0, \ k = 0, 1, 2, 3 \tag{6}$$

$$u(x, t)|_{x\in\Gamma} = u(0, x_3, t)|_{x_3\geqslant 0} = -\theta(t - x_3) e^{i\gamma(t-x_3)}.$$

4°. Рассмотрим следующий динамический аналог потенциала простого слоя для уравнения (3), сосредоточенный на стенке Г:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty \mu(s, t-\tau) W(x - y(s), \tau) ds d\tau, \tag{7}$$

где

$$W(x - y(s), \tau) = \frac{\theta(\tau - |x - y(s)|)}{\sqrt{\tau^2 - |x - y(s)|^2}} \cos\left(\alpha \frac{x_1}{|x - y(s)|} \sqrt{\tau^2 - |x - y(s)|^2}\right)$$

(см. формулу (5)) и $|x - y(s)| = \sqrt{x_1^2 - (x_3 - s)^2}$.

Будем искать решение задачи (6) в виде функции, представленной потенциалом (7) с неизвестной функцией $\mu(s, t)$. Уравнение и начальные условия в (6) при этом удовлетворяются. Полагая $x_1 = 0$ при $x_3 > 0$, получим на основе граничного условия (6) следующее интегральное уравнение для неизвестной функции $\mu(s, t)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^\infty \mu(s, t-\tau) \frac{\theta(\tau - |x_3 - s|)}{\sqrt{\tau^2 - |x_3 - s|^2}} ds d\tau = -\theta(t - x_3) e^{i\gamma(t-x_3)}, \tag{8}$$

рассматриваемое на полуоси $x_3 \geqslant 0$.

Будем предполагать, что искомая функция $\mu(s, t)$ удовлетворяет в окрестности точки $s = 0$ оценке

$$|\mu(s, t)| \leqslant \frac{C(t)}{\sqrt{s}}, \ t \geqslant 0. \tag{9}$$

Для решения уравнения (8) применим к нему преобразование Лапласа по переменной t и в результате получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty K_0(p|x_3 - s|) \bar{\mu}(s, p) ds = -\frac{e^{-px_3}}{p - i\gamma} \tag{10}$$

при $x_3 \geqslant 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$. При выводе (10) были использованы известные таблицы интегральных преобразований [7]. Через p в (10) обозначен параметр преобразования Лапласа, $\bar{\mu}(s, p)$ — преобразование Лапласа функции $\mu(s, t)$, а $K_0(z)$ — цилиндрическая функция Мак-Дональда.

Уравнение (10) при всех p, таких, что $\operatorname{Re} p > 0$, является интегральным уравнением Винера—Хопфа первого рода на полуоси. Методы решения таких уравнений в настоящее время хорошо разработаны [8, 9], поэтому ограничимся тем, что приведем лишь окончательную формулу для решения уравнения (10):

$$\bar{\mu}(s, p) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{p}{s}} \frac{e^{-ps}}{p - i\gamma}. \tag{11}$$

Вычисляя интеграл Меллина, дающий обращение преобразования Лапласа, из (11) получим для функции $\mu(s, t)$ соотношение

$$\mu(s, t) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\theta(t-s)}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}} - i\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\gamma} \frac{\theta(t-s)}{\sqrt{s}} e^{i\gamma(t-s)} \mathcal{F}\left(\sqrt{\gamma(t-s)}\right), \tag{12}$$

где $\mathcal{F}(z)$ обозначает известный интеграл Френеля:

$$\mathcal{F}(z)=\int_0^z e^{-i\zeta^2}d\zeta.$$

Таким образом, решение интегрального уравнения найдено и имеет вид (12). Подставляя (12) в формулу (7), получим явное решение задачи (6).

5°. Анализируя формулы (7) и (12), можно выяснить качественную картину полного поля, возникающего в результате рассматриваемой дифракции.

Отметим, прежде всего, что, как обычно, в случае скользящего падения дифрагирующей волны в полном волновом поле отсутствуют «геометро-оптические» слагаемые, вызываемые отражением. Здесь полное волновое поле складывается из падающей волны $u_0(x, t)$ и чисто дифракционного поля (см. (7)) $u(x, t)$, которое оказывается отличным от нуля лишь внутри круга $|x|=\sqrt{x_1^2+x_3^2}\leqslant t$. Таким образом, в области $x_3>t$ полное поле $U\equiv 0$, в области $x_3<t$ и вне круга $|x|\leqslant t$ U совпадает с $u_0(x, t)$, а внутри круга $|x|\leqslant t$ поле U складывается из падающей волны и дифракционного поля $u(x, t)$. Анализ дифракционного поля, представленного интегралом (7), возможен лишь на основе численных методов.

6°. Изучим вопрос о поведении полного и дифрагированного поля при больших временах, т. е. при $t\to+\infty$. В соответствии с общепринятым, будем говорить, что решение задачи (6) стабилизируется при $t\to+\infty$ и выходит на установившийся режим, если для каждого $x=(x_1, x_3)\in R^2$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-i\gamma t}u(x, t)=v(x), \tag{13}$$

где функция $v(x)$ называется *предельной амплитудой*.

Нами доказано, что для решения задачи (6) существует предельная амплитуда $v(x)$, определенная формулой (13), и для нее справедливы следующие интегральные представления:

$$v(x)=-\sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}}\frac{1}{\pi}e^{i\pi/4}\int_0^\infty\frac{e^{-i\gamma s}}{\sqrt{s}}\int_0^\infty\frac{\theta(\xi-|x-y(s)|)}{\sqrt{\xi^2-|x-y(s)|^2}}e^{-i\gamma\xi}\times$$

$$\times\cos\left(\alpha\frac{x_1}{|x-y(s)|}\sqrt{\xi^2-|x-y(s)|^2}\right)d\xi ds=$$

$$=\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}e^{-i\pi/4}\int_0^\infty\frac{e^{-i\gamma s}}{\sqrt{s}}H_0^{(2)}\left(\sqrt{(\gamma^2-\alpha^2)x_1^2+\gamma^2(x_3-s)^2}\right)ds, \tag{14}$$

где $H_0^{(2)}(z)$ — функция Ханкеля второго рода.

Предельная амплитуда $v(x)$ удовлетворяет уравнению (6) для случая установившихся колебаний, зависящих от времени по закону $e^{i\gamma t}$, т. е. уравнению *

$$L_\gamma[v]\equiv\gamma^2 v_{x_1x_1}+(\gamma^2-\alpha^2)v_{x_3x_3}+\gamma^2(\gamma^2-\alpha^2)v=0 \tag{15}$$

* Напомним, что оператор уравнения установившихся колебаний определяется по формуле

$$L_\gamma[v(x)]=e^{-i\gamma t}\mathfrak{M}_t[e^{i\gamma t}v(x)].$$

при $x \in R^2 \setminus \Gamma$. А при $x \in \Gamma (x_1 = 0,\ x_3 \geqslant 0)$ предельная амплитуда удовлетворяет граничному условию

$$v(x)|_{x \in \Gamma} = v(0,\ x_3)|_{x_3 > 0} = -\exp\{-i\gamma x_3\}. \tag{16}$$

Таким образом, функция $v(x)$ является решением краевой задачи (15)—(16).

Рассмотрим наконец полное волновое поле $U(x,\ t) = u(x,\ t) + \theta(t - x_3) \exp\{i\gamma(t - x_3)\}$. Из изложенного выше следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-i\gamma t} U(x,\ t) = e^{-i\gamma x_3} + v(x), \tag{17}$$

и тем самым полное поле при $t \to +\infty$ стабилизируется к полному полю (17), описываемому уравнением (15) и возникающему в результате установившейся дифракции на стенке Г при скользящем падении плоской волны $v_0 = \exp\{i\gamma x_3\}$.

Заметим в заключение, что уравнение (15) установившихся волн в случае $\gamma > \alpha$ является уравнением эллиптического вида, а при $\gamma < \alpha$ — уравнением гиперболического типа (типа Клейна—Гордона). Задачи дифракции для уравнений эллиптического типа являются классическими и хорошо изученными. Что же касается аналогичных задач для уравнений гиперболического типа, то их систематическое исследование началось лишь в последние годы [10—12].

Авторы благодарны профессору А. Г. Свешникову за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Соболев С. Л. Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 1, с. 3. [2] Масленникова В. Н. Автореф. докт. дис. Новосибирск, 1971. [3] Александрян Р. А. Тр. Моск. матем. общ., 1960, № 9, с. 455. [4] Копачевский Н. Д. Препринт № 38-71. Физ.-тех. ин-та низ. температур АН УССР. Харьков, 1978. [5] Зеленяк Т. И., Капитонов Б. В., Сказка В. В., Фокин М. В. Препринт № 471 ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1983. [6] Габов С. А. ДАН СССР, 1980, 254, с. 777. [7] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. [8] Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. [9] Нобл Б. Метод Винера—Хопфа. М.: ИЛ, 1962. [10] Габов С. А. ДАН СССР, 1982, 264, с. 73. [11] Габов С. А. ЖВМиМФ, 1982, 22, с. 1513. [12] Габов С. А., Свешников А. Г., Шатов А. К. ДАН СССР, 1983, 268, с. 1095.

Поступила в редакцию
04.10.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 3

УДК 530.145.7

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ КАЛУЦЫ — КЛЕЙНА

А. П. Демичев, Н. Ф. Нелипа

(НИИЯФ)

1. В последнее время уделяется большое внимание построению единых моделей в рамках многомерной теории Калуцы—Клейна [1, 2, 3]. В основе этих моделей лежит общековариантная теория поля в многомерном римановом пространстве E. Поэтому возникает проблема установления связи с обычным четырехмерным теоретико-полевым формализмом. В стандартном подходе [1, 3] предполагается, что характерные размеры дополнительного к четырехмерному подпространства весьма малы (порядка обратной массы Планка M_P), и поэтому для перехода