при $x \in R^2 \setminus \Gamma$. А при $x \in \Gamma (x_1=0,\ x_3 \geqslant 0)$ предельная амплитуда удовлетворяет граничному условию

$$v(x)|_{x \in \Gamma} = v(0,\ x_3)|_{x_3>0} = -\exp\{-i\gamma x_3\}. \qquad (16)$$

Таким образом, функция $v(x)$ является решением краевой задачи (15)—(16).

Рассмотрим наконец полное волновое поле $U(x,\ t) = u(x,\ t) + \theta(t-x_3)\exp\{i\gamma(t-x_3)\}$. Из изложенного выше следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-i\gamma t} U(x,\ t) = e^{-i\gamma x_3} + v(x), \qquad (17)$$

и тем самым полное поле при $t \to +\infty$ стабилизируется к полному полю (17), описываемому уравнением (15) и возникающему в результате установившейся дифракции на стенке Г при скользящем падении плоской волны $v_0 = \exp\{i\gamma x_3\}$.

Заметим в заключение, что уравнение (15) установившихся волн в случае $\gamma > \alpha$ является уравнением эллиптического вида, а при $\gamma < \alpha$ — уравнением гиперболического типа (типа Клейна—Гордона). Задачи дифракции для уравнений эллиптического типа являются классическими и хорошо изученными. Что же касается аналогичных задач для уравнений гиперболического типа, то их систематическое исследование началось лишь в последние годы [10—12].

Авторы благодарны профессору А. Г. Свешникову за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Соболев С. Л. Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 1, с. 3. [2] Масленникова В. Н. Автореф. докт. дис. Новосибирск, 1971. [3] Александрян Р. А. Тр. Моск. матем. общ., 1960, № 9, с. 455. [4] Копачевский Н. Д. Препринт № 38-71. Физ.-тех. ин-та низ. температур АН УССР. Харьков, 1978. [5] Зеленяк Т. И., Капитонов Б. В., Сказка В. В., Фокин М. В. Препринт № 471 ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1983. [6] Габов С. А. ДАН СССР, 1980, 254, с. 777. [7] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. [8] Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. [9] Нобл Б. Метод Винера—Хопфа. М.: ИЛ, 1962. [10] Габов С. А. ДАН СССР, 1982, 264, с. 73. [11] Габов С. А. ЖВМиМФ, 1982, 22, с. 1513. [12] Габов С. А., Свешников А. Г., Шатов А. К. ДАН СССР, 1983, 268, с. 1095.

Поступила в редакцию
04.10.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 3

УДК 530.145.7

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ КАЛУЦЫ — КЛЕЙНА

А. П. Демичев, Н. Ф. Нелипа

(НИИЯФ)

1. В последнее время уделяется большое внимание построению единых моделей в рамках многомерной теории Калуцы—Клейна [1, 2, 3]. В основе этих моделей лежит общековариантная теория поля в многомерном римановом пространстве E. Поэтому возникает проблема установления связи с обычным четырехмерным теоретико-полевым формализмом. В стандартном подходе [1, 3] предполагается, что характерные размеры дополнительного к четырехмерному подпространства весьма малы (порядка обратной массы Планка M_P), и поэтому для перехода

к обычному четырехмерному пространству-времени все величины необходимо усреднить по дополнительным координатам. Однако, в отличие от реалистичных моделей объединения, получаемая при этом теория обладает точной калибровочной инвариантностью. Кроме того, массы частиц в таком подходе оказываются очень большими ($\sim M_P$) и не соответствуют низкоэнергетической феноменологии.

В связи с этим представляет интерес рассмотреть другой возможный путь перехода от многомерного риманова пространства к четырехмерному. Именно: мы будем предполагать, что обычное пространство-время является четырехмерным подмногообразием $Y \subset E$ и все величины вместо усреднения сужаются на это подмногообразие.

2. Прежде всего необходимо выяснить условия, при которых возможен переход на подмногообразие в многомерной общей теории относительности. Пусть x^m, y^μ $(m=0, \ldots, 3;\ \mu=1, \ldots, d)$ — локальные координаты риманова пространства E. Скалярная кривизна пространства E имеет вид

$$R_E = 2(g^{mn}g^{\mu\nu} - g^{m\mu}g^{n\nu})\, g_{mn,\mu\nu} + \ldots,$$

где многоточие обозначает остальные члены, не содержащие $g_{mn,\mu\nu} \equiv \equiv \dfrac{\partial^2 g_{mn}}{\partial y^\mu \partial y^\nu}$. Используя общую ковариантность, можно выбрать систему координат, в которой уравнениями поверхности Y являются $y^\mu = 0$. Производные $g_{mn,\mu\nu}$ не выражаются через производные по x^m и, следовательно, на подмногообразии Y являются независимыми динамическими переменными. Поэтому если, как обычно, взять R_E в качестве лагранжиана, то для вакуумного решения получаем вырожденную метрику $g^{\mu\nu} = 0$, что неприемлемо.

Возможный выход заключается в том, чтобы рассматривать действие на классе решений, удовлетворяющих, например, условию постоянства по ортогональным к поверхности направлениям, что ведет, конечно, к спонтанному нарушению общей ковариантности. Такой выбор решений совпадает с условием цилиндричности в теории Калуцы—Клейна [1]. Указанное требование, однако, можно существенно ослабить, считая, что нулю равна не обычная производная, а производная Ли:

$$\mathcal{L}_{e_\alpha} g_{MN}(x, y) = 0, \tag{1}$$

где e_α — вектор касательного пространства E. Другими словами, в направлении e_α метрика переносится с помощью преобразований некоторой группы G. Условия (1) фактически являются уравнениями связи, так что обычные производные $g_{mn,\mu\nu}$ не являются независимыми переменными, а вычисляются явно из этих условий.

3. В качестве многомерной модели выберем, как обычно [2, 3], расслоенное пространство $E(M, G/H, G)$ с четырехмерной базой M, структурной группой G и слоем — факторпространством G/H, где H — подгруппа G (мы рассмотрим только симметрические пространства G/H). Тогда ортогональный ковариантный репер, согласованный со структурой расслоенного пространства E и условием (1), можно выбрать в виде

$$E^A_M(x, y) = \begin{pmatrix} E^a_m & -\rho(x)\, A^{\hat\beta}_m(x)\, D^\alpha_{\hat\beta}(L_y) \\ 0 & \rho(x)\, e^\alpha_\mu(y) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где E^a и e^α — ортогональные базисы соответственно горизонтальных и вертикальных 1-форм, $A^{\hat\beta}$ — компоненты 1-формы связности, $D^{\hat\beta}_{\hat\alpha}$ —

матрица присоединенного представления группы G, L_y — представитель класса смежности G/H, $\rho(x)$ — скалярная функция на базе. Подставляя (2) в формулы для кривизны R в ортогональном базисе, получаем

$$R=R_4-\frac{1}{4}\rho^2(x)F^{\widehat{\alpha}}_{mn}(x)F^{\widehat{\beta}}_{kl}(x)D^{\alpha}_{\widehat{\alpha}}(L_y)D^{\alpha}_{\widehat{\beta}}(L_y)g^{mk}(x)g^{nl}(x)-$$
$$-d(d-1)\rho^{-2}g^{mn}\partial_m\rho(x)\partial_n\rho(x)+\frac{d}{2}\rho^{-2}(x). \tag{3}$$

Здесь R_4 — скалярная кривизна базы M, соответствующая $E_m{}^a$, $F^{\widehat{\alpha}}_{mn}$ — кривизна Янга—Миллса для $A^{\widehat{\alpha}}_m$.

При редукции на поверхность координаты y^μ становятся новыми скалярными полями $y^\mu(x)$. Но из (3) видно, что R, выбранная в качестве лагранжиана, не содержит кинетического члена для них. Более того, в (3) нет кинетического члена и для калибровочных полей подгруппы H. Однако от этих недостатков можно избавиться, если добавить к (3) лагранжиан многомерного янг-миллсовского поля $W^{\bar{\alpha}}$ группы H и космологический член. Действительно, как показано в [4], физическое калибровочное поле является суперпозицией соответствующей части метрики и многомерного калибровочного поля группы H (этот результат не зависит от способа перехода к четырехмерному пространству). Значит, в качестве анзаца для $W^{\bar{\alpha}}$ можно взять

$$W^{\bar{\alpha}}(x,\ y)=V^{\bar{\alpha}}_m(x)\,dx^m+A^{\widehat{\alpha}}_mD^{\bar{\alpha}}_{\widehat{\alpha}}(L_y)\,dx^m-e^{\bar{\alpha}}_\mu(y)\,dy^\mu,$$

где $\bar{e}^\alpha$ — форма Маурера—Картана группы H; $V^{\bar{\alpha}}_m$ — калибровочное поле группы H. Тогда для квадрата кривизны этого поля получаем

$$\mathcal{F}_{AB}\mathcal{F}_{AB}=F^{\widehat{\alpha}}_{ab}F^{\widehat{\beta}}_{ab}D^{\bar{\alpha}}_{\widehat{\alpha}}D^{\bar{\alpha}}_{\widehat{\beta}}-(r-d)\rho^{-4}+P(V^{\bar{\alpha}}_m), \tag{4}$$

где $P(V^{\bar{\alpha}}_m)$ — однородный полином по полю $V^{\bar{\alpha}}_m$, $r\equiv\dim G$. Что касается космологического члена, то его редукция приводит к следующему выражению:

$$\lambda\int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}=\lambda\int d^4x\sqrt{-g\det(\delta^p_n+g^{pk}\rho^2\mathcal{D}^\alpha_k\mathcal{D}^\alpha_n)}=$$
$$=\lambda\int d^4x\sqrt{-g}\left(1+\frac{1}{2}\rho^2g^{mn}\mathcal{D}^\alpha_m\mathcal{D}^\alpha_n+\ldots\right), \tag{5}$$

где $\tilde{g}$ — метрика, редуцированная на подмногообразие, $\mathcal{D}^\alpha_m\equiv e^\alpha_m-A^{\widehat{\alpha}}_mD^\alpha_{\widehat{\alpha}}$, $e^\alpha_m=e^\alpha_\mu\dfrac{\partial y^\mu}{\partial x^m}$, а многоточие обозначает высшие члены разложения. Можно показать, что разложение в (5) является низкоэнергетическим — по степеням k^2. При этом если поле $\rho(x)$ имеет ненулевое вакуумное среднее, то в унитарной калибровке ($y^\mu=0$) получается массовый член $(\lambda k^2A^\alpha_mA^\alpha_m)/2$. Значит, поля $y^\mu(x)$ играют роль голдстонионов.

Собирая вместе (3), (4), (5), получаем искомый лагранжиан модели:

$$\mathcal{L}=\sqrt{-\tilde{g}}\sqrt{\det(1+\rho^2g^{-1}\mathcal{D}\cdot\mathcal{D})}\left[\frac{1}{k^2}R_4-\frac{\rho^2}{4k^2}F^{\widehat{\alpha}}_{mn}F^{\widehat{\beta}}_{kl}D^{\alpha}_{\widehat{\alpha}}D^{\alpha}_{\widehat{\beta}}g^{mk}g^{nl}-\right.$$
$$-\frac{1}{4e^2}F^{\widehat{\alpha}}_{mn}F^{\widehat{\beta}}_{kl}D^{\bar{\alpha}}_{\widehat{\alpha}}D^{\bar{\alpha}}_{\widehat{\beta}}g^{mk}g^{nl}-\frac{d(d-1)}{k^2}\rho^{-2}g^{mn}\partial_m\rho\partial_n\rho+$$

$$+\frac{d}{2k^2}\rho^{-2}-\frac{(r-d)}{4e^2}\rho^{-4}+\lambda+P(V_m^{\bar\alpha})\Big]. \qquad (6)$$

Из (6) следует, что вакуумное значение поля $\rho(x)$ действительно отлично от нуля: $\langle\rho^2\rangle_0 \equiv a^2 = (r-d)k^2/d\cdot e^2$. Заметим, что нулевому значению четырехмерной космологической постоянной Λ отвечает величина $\lambda=(d^2\cdot e^2/4(r-d)k^4)\sim(ka)^{-2}$ и, значит, масса полей Янга—Миллса оказывается порядка a^{-2}.

Пренебрежем в (6) высшими степенями поля $\varphi\equiv\tilde\varphi-a^{-1}$, где $\tilde\varphi\equiv\rho^{-1}$, и опустим несущественные для нашего рассмотрения поля $V_m^{\bar\alpha}$.

Тогда с учетом (5) получаем

$$\mathcal{L}=\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{k^2}R_4-\frac{a^2}{4k^2}F_{mn}^{\hat\alpha}F_{kl}^{\hat\alpha}g^{mk}g^{nl}-\frac{1}{4e}\left(\frac{r}{d}-2\right)F_{mn}^{\hat\alpha}F_{kl}^{\hat\beta}g^{mk}g^{nl}\times$$

$$\times D_{\hat\alpha}^{\alpha}D_{\hat\beta}^{\alpha}-\frac{d(d-1)}{k^2}(\tilde\varphi)^{-2}(\partial_m\varphi)^2+\frac{d}{2k^2}\varphi^2-\frac{(r-d)}{4e^2}\varphi^4+$$

$$+\frac{\lambda}{2}(\tilde\varphi)^{-2}g^{mn}\mathcal{D}_m^{\alpha}\mathcal{D}_n^{\alpha}\Big]. \qquad (7)$$

Таким образом, лагранжиан (6) включает в себя кинетические члены для всех полей и может претендовать на роль лагранжиана единой теории, содержащей все четыре типа основных взаимодействий.

4. В заключение покажем, что часть лагранжиана, связанная с полями $\varphi(x)$ и $y^\mu(x)$, весьма близка к обычному лагранжиану Хиггса. Для простоты рассмотрим случай, когда слой в E — сфера, т. е. $G=SO(d+1)$, $H=SO(d)$. Тогда если ввести линейное поле $n(x)=\tilde\varphi(x)L_y n_0$ (где n_0 — единичный фиксированный вектор в $d+1$-мерном пространстве) и пренебречь высшими членами разложения по $\varphi(x)$, то лагранжиан (7) для полей $\varphi(x)$ и $y^\mu(x)$ можно записать в виде

$$-\sqrt{-g}\left[\frac{d(d-1)}{k^2}(\tilde\varphi^{-1}\partial_m\varphi)^2+\frac{d}{4a^2k^2}\tilde\varphi^{-2}(\mathcal{D}_m^{\alpha})^2-\frac{d}{2k^2}\tilde\varphi^2+\frac{(r-d)}{4e^2}\tilde\varphi^4\right]=$$

$$=-\sqrt{-g}\left\{\frac{d\cdot a^2}{2k^2}[(\partial_m-A_m)n]^2-\frac{d}{2k^2}n^2+\frac{(r-d)}{4e^2}n^4+\ldots\right\}.$$

Следовательно, в изложенном подходе из геометрических соображений получается лагранжиан Хиггса с неполиномиальной добавкой для поля хиггсовского бозона $\varphi(x)$. Поле $\varphi(x)$ и голдстонионы $y^\mu(x)$ имеют разную геометрическую природу: первое связано с метрикой, а вторые являются координатами многообразия.

Авторы выражают благодарность А. Е. Пухову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Kaluza Th., Sitzugsber. Preuss. Acad. Wiss. Berlin, Math. Phys., K1, 1921, p. 966. [2] Witten E. Nucl. Phys., 1981, **B186**, p. 412. [3] Abdus Salam, Strathdee J. Ann. Phys., 1982, **141**, p. 316. [4] Randjbar-Daemi S., Abdus Salam, Strathdee J. Nucl. Phys., 1983, **B214**, p. 491.

Поступила в редакцию
19.07.84